



TESIS SS14-2501

**MODEL *GEOGRAPHICALLY WEIGHTED
UNIVARIATE WEIBULL REGRESSION***

Studi Kasus : Indikator Pencemaran Sungai di Surabaya

FITRIARMA PUTRI SANTOSO
NRP. 1313 201 051

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Purhadi, M.Sc.

**PROGRAM MAGISTER
JURUSAN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2015**



TESIS SS14-2501

***GEOGRAPHICALLY WEIGHTED
UNIVARIATE WEIBULL REGRESSION MODEL***

Case Study : River Pollution Indicator in Surabaya

FITRIARMA PUTRI SANTOSO
NRP. 1313 201 051

SUPERVISOR
Dr. Purhadi, M.Sc.

**PROGRAM OF MAGISTER
DEPARTMENT OF STATISTIC
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2015**

**MODEL GEOGRAPHICALLY WEIGHTED UNIVARIATE
WEIBULL REGRESSION**

Studi Kasus: Indikator Pencemaran Sungai di Surabaya

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh :

FITRIARMA PUTRI SANTOSO
NRP. 1313201051

Tanggal Ujian : 28 Mei 2015
Periode Wisuda : September 2015

Disetujui Oleh :

1. Dr. Puhadi, M.Sc
NIP. 19620204 198701 1 001

(Pembimbing)

2. Dr. Bambang Wijanarko Otok, M.Si
NIP. 19681124 199412 1 001

(Penguji)

3. Dr. Santi Puteri Rahayu, S.Si., M.Si
NIP. 19750115 199903 2 003

(Penguji)

Direktur Pascasarjana ITS

Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, MT
NIP. 19640405 199002 1 001

MODEL GEOGRAPHICALLY WEIGHTED UNIVARIATE WEIBULL REGRESSION

Studi Kasus: Indikator Pencemaran Sungai di Surabaya

Nama Mahasiswa : Fitriarma Putri Santoso
NRP : 1313 201 051
Pembimbing : Dr. Purnadi, M.Sc

ABSTRAK

Metode yang digunakan dalam memodelkan hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor adalah analisis regresi. Suatu model regresi dimana variabel respon (Y) berdistribusi weibull dengan variabel prediktor X_1, X_2, \dots, X_k adalah model regresi weibull. Seperti halnya analisis regresi linier, hubungan antara variabel prediktor dan variabel respon pada analisis regresi weibull dianggap konstan untuk setiap lokasi geografis, sehingga penaksir parameter yang didapat juga bersifat global untuk setiap lokasi. *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR) merupakan bentuk lokal dari regresi weibull dan merupakan metode statistik yang digunakan untuk menganalisis data spasial. Univariat berarti jumlah variabel respon adalah satu. Penelitian ini bertujuan untuk menaksir parameter model GWUWR, mendapatkan statistik uji GWUWR dan menerapkannya pada kasus riil. Data yang digunakan merupakan data konsentrasi *Chemical Oxygen Demand* (COD) sungai di Surabaya dan faktor yang mempengaruhinya. Dalam menaksir parameter menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dengan dibantu metode iterasi *Newton Raphson*, sedangkan untuk mendapatkan statistik uji menggunakan *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT). Faktor lokasi tidak berpengaruh terhadap pemodelan COD sehingga faktor-faktor yang berpengaruh di setiap lokasi hampir sama. Faktor-faktor yang berpengaruh terhadap *Chemical Oxygen Demand* (COD) di sungai Surabaya berdasarkan model GWUWR antara lain lebar sungai (X_1), kedalaman sungai (X_2), kecepatan air (X_3) dan debit sungai (X_4).

Kata Kunci : Distribusi weibull, *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR), *Chemical Oxygen Demand* (COD)

MODEL GEOGRAPHICALLY WEIGHTED UNIVARIATE WEIBULL REGRESSION

Studi Kasus: Indikator Pencemaran Sungai di Surabaya

Student Name : Fitriarma Putri Santoso
NRP : 1313 201 051
Supervisor : Dr. Purnadi, M.Sc

ABSTRACT

The method used to modelling the relationship between the response variable and the predictor variable is regression analysis. Response variable (Y), weibull distribution, with the predictors variable X_1, X_2, \dots, X_k is weibull regression model. Such as linear regression analysis, the relationship between predictor variables and response variable in weibull regression assumed to be constant for each geographical location, then the parameter estimation is also obtained global for each location. GWUWR is a statistical method for analyzing spatial data and a local form of weibull regression. Univariate means the number of the response variable is only one. This study aims to estimate the parameters of GWUWR model, getting a test statistic of GWUWR and applying it to the real case. The data that used is data of concentration of Chemical Oxygen Demand (COD) in Surabaya river and their the factors that influence. Estimate parameters are use Maximum Likelihood Estimation (MLE) with helped by Newton Raphson iteration method, whereas to get the test statistic using Maximum Likelihood Ratio Test (MLRT). Location factors have not given influence to COD modelling, hence every factors influenced in every location are almost the same. Factors influence in Chemical Oxygen Demand (COD) in Surabaya river based on GWUWR models are the wide of the river (X_1), the depth of the river (X_2), the speed of the water (X_3) and river discharge (X_4).

Key words : *Weibull Distribution, Geographically Weighted Univariate Weibull Regression (GWUWR), Chemical Oxygen Demand (COD)*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah. Segala puji dan syukur kehadiran Allah SWT atas berkat dan rahmat-Nya yang tiada tara sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan tesis dengan judul ***MODEL GEOGRAPHICALLY WEIGHTED UNIVARIATE WEIBULL REGRESSION Studi Kasus : Indikator Pencemaran Sungai di Surabaya.***

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Magister Sains (M.Si) di Jurusan Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Dengan selesainya tesis ini, tentunya tidak terlepas dari bantuan semua pihak, untuk itu penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Allah SWT atas semua kebaikan, anugerah dan curahan kasih sayang yang sangat luar biasa yang telah diberikan.
2. Ibu dan ayah tercinta, Elok Ismawati dan Gatoet Santoso atas segala doa dan dukungan yang selalu diberikan selama ini.
3. Bapak Dr. Purhadi, M.Sc. selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan, waktu dan semangat yang diberikan dalam menyelesaikan laporan tesis ini.
4. Bapak Dr. Bambang Wijanarko Otok, M.Si. dan Ibu Dr. Santi Puteri, S.Si, M.Si selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan dalam laporan tesis ini.
5. Ibu Dr. Irhamah, S.Si., M.Si selaku dosen wali atas segala saran yang diberikan.
6. Bapak Dr. Muhammad Mashuri, MT., selaku Ketua Jurusan Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
7. Bapak dan Ibu dosen Jurusan Statistika FMIPA ITS yang telah memberikan ilmu yang bermanfaat, serta seluruh staf administrasi akademik,

laboratorium, dan ruang baca Statistika FMIPA ITS yang telah memberikan pelayanan dan fasilitas selama perkuliahan.

8. Eyang uti Lukayah (Almh.), Tante Ellis Istiawati, adik Fadhilah Ayu Rachmawati, kakak Bayu Isma Rizki Saputra dan adik Giovanny Praisukma Pertiwi tersayang atas dukungan dan semangatnya.
9. Special Thank to Yuniati Dian Pertiwi, Maulida Nurhidayati dan Asih Kurniasih Lumaela (Almh.), sahabat-sahabat tersayang atas segala warna pertemanan selama ini. Terima kasih banyak Lida dan Tiwi atas bantuannya ^^. Kalian yang terbaik =)
10. Mas Aris Kurniawan Noor yang telah menjadi motivator, terima kasih atas segala semangat dan perhatian yang diberikan.
11. M. Iqbal Thola yang telah bersabar ngoreksi penurunan rumusku =) dan Mbak Pipit atas kerjasama dan kebersamaannya.
12. Dhea, Farida, Nariza, Kiki, Jihad, Mei terima kasih atas canda tawanya, persaudaraan yang terjalin semoga tak terhenti. Aamiin
13. Penghuni kos GK-35, Maun, Tya, Ika, Achi terima kasih support nya.
14. Rekan-rekan seperjuangan Magister Statistika angkatan 2013, terima kasih atas saran, kerjasama dan kebersamaannya.
15. Semua pihak yang karena keterbatasan penulis tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tesis ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu saran maupun kritik yang membangun sangat diharapkan demi perbaikan dan kesempurnaan karya ini. Akhir kata, semoga tulisan ini memberikan manfaat bagi semua. Aamiin Yaa Rabbal'alam.

Surabaya, Juni 2015

Penulis,

DAFTAR ISI

	halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR GAMBAR	xix
DAFTAR LAMPIRAN	xxi
 BAB 1 PENDAHULUAN	 1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Permasalahan Penelitian	6
1.3 Tujuan Penelitian	6
1.4 Manfaat Penelitian	6
1.5 Batasan Penelitian	7
 BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA	 9
2.1 Distribusi Weibull	9
2.2 Model Regresi Univariat Weibull	10
2.2.1 Estimasi Parameter Model Regresi Weibull	10
2.2.2 Pengujian Parameter Model Regresi Weibull	13
2.3 Anderson Darling	15
2.4 Multikolinearitas	16
2.5 Matriks Pembobot	16
2.6 Geographically Weighted Univariate Weibull Regression (GWUWR)	18

2.7 Pencemaran Air.....	18
2.7.1 Aspek Biokimia Pencemaran Air.....	20
2.7.2 Indikator Pencemaran Air	20
2.7.3 Faktor Karakteristik Sungai	25
BAB 3 METODOLOGI PENELITIAN.....	27
3.1 Sumber Data.....	27
3.2 Identifikasi Variabel.....	29
3.3 Metode Penelitian	30
BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN.....	39
4.1 Penaksiran Parameter Model <i>Geographically Weighted Univariate Weibull Regression</i> (GWUWR).....	39
4.2 Pengujian Parameter Model <i>Geographically Weighted Univariate Weibull Regression</i> (GWUWR).....	48
4.2.1 Pengujian Kesamaan Model GWUWR.....	48
4.2.2 Pengujian Serentak Parameter Model GWUWR ($\beta(u_i, v_i)$) ..	64
4.2.3 Pengujian Parsial Parameter Model GWUWR ($\beta(u_i, v_i)$)	67
4.3 Faktor-faktor Yang Berpengaruh Terhadap <i>Chemical Oxygen Demand</i> (COD)	68
4.3.1 Uji Anderson Darling.....	68
4.3.2 Deskripsi <i>Chemical Oxygen Demand</i> (COD) dan Faktor-faktor yang Mempengaruhinya.....	69
4.3.3 Pemeriksaan Multikolinearitas.....	70
4.3.4 Pemodelan <i>Chemical Oxygen Demand</i> (COD) dengan Regresi Univariat Weibull.....	70
4.3.5 Pemodelan <i>Chemical Oxygen Demand</i> (COD) dengan GWUWR.....	72
BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN.....	79
5.1 Kesimpulan	79

5.2 Saran	79
DAFTAR PUSTAKA.....	81
LAMPIRAN	85

DAFTAR TABEL

	halaman
Tabel 3.1 Titik Observasi Sungai Surabaya.....	28
Tabel 3.2 Variabel Penelitian.....	29
Tabel 3.3 Struktur Data.....	30
Tabel 4.1 Uji Distribusi Data Y (COD).....	69
Tabel 4.2 Statistika Deskriptif Variabel Penelitian	69
Tabel 4.3 VIF Variabel Prediktor	70
Tabel 4.4 Nilai Devians Model Regresi Weibull.....	71
Tabel 4.5 Hasil Taksiran Parameter Regresi Weibull.....	71
Tabel 4.6 Perbandingan Nilai Devians Model Regresi Weibull dan GWUWR....	73
Tabel 4.7 Uji Serentak Model GWUWR.....	74
Tabel 4.8 Hasil Taksiran Parameter GWUWR di Kali Surabaya Kedurus	74
Tabel 4.9 Variabel yang Signifikan dalam Model GWUWR Sungai Surabaya....	75
Tabel 4.10 Penentuan Kelas Setiap Lokasi.....	76

DAFTAR GAMBAR

	halaman
Gambar 3.1 Lokasi Pemantauan Air Sungai Tahun 2013	27
Gambar 3.2 <i>Flow Chart</i>	35

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Distribusi weibull identik dengan keandalan (*reliability*) dan kegagalan (*failure*). Keandalan merupakan probabilitas dari kinerja proses yang dalam periode waktu tertentu masih berada di bawah kondisi yang ditetapkan. Sebuah proses dikatakan handal apabila tidak ada kegagalan dalam kinerja proses (Khan, 2010).

Awal mula penemuan distribusi weibull berlangsung antara 1922 dan 1943. Pada proses ini, ada tiga kelompok orang bekerja secara mandiri dengan tujuan yang sangat berbeda sehingga membentuk sebuah rantai dari tiga link. Waloddi Weibull (1887-1979) adalah link terakhir rantai ini. Nama distribusi ini diambil dari nama Waloddi Weibull, karena Waloddi Weibull yang telah menyebarkan distribusi secara internasional dan antar cabang ilmu pengetahuan (Rinne, 2009).

Salah satu metode yang digunakan untuk memodelkan hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor adalah analisis regresi. Seiring berjalannya waktu, analisis regresi telah banyak digunakan dan dikembangkan sesuai dengan tujuan yang ada. Analisis regresi yang digunakan dalam *failure event* adalah analisis survival. Analisis survival memerlukan data yang memuat waktu survival. Salah satu metode analisis survival yang dapat digunakan untuk mengetahui hubungan antara variabel independen dengan variabel dependen yang merupakan waktu survival adalah regresi cox. Sedangkan regresi weibull merupakan analisis regresi dimana variabel respon (Y) berdistribusi weibull dan bukan berupa waktu survival.

Banyak penelitian yang telah mengkaji tentang regresi weibull. Hanagal (2005) meneliti tentang model regresi bivariat weibull berdasarkan pemeriksaan sampel dengan kovariat umum. Pada penelitiannya mengkaji estimasi parameter menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation*, melakukan pengujian

hipotesis dan menerapkannya pada kasus biometrik. Dari penelitian tersebut didapatkan kekuatan dari statistik uji yang diperoleh dengan menggunakan data simulasi untuk 1000 sampel. Sulistyani (2013) meneliti mengenai pemodelan regresi *cox weibull* untuk mengetahui faktor-faktor yang mempengaruhi laju perbaikan kondisi klinis pasien penderita *stroke*. Dari penelitiannya didapatkan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap laju perbaikan kondisi klinis pasien penderita *stroke* di RSUD Haji Surabaya antara lain usia, penyakit jantung, *diabetes mellitus*, hiperkolesterol, *Transient Ischemic Attack* (TIA), dan jenis *stroke*. Sedangkan Furqon (2013) meneliti mengenai kasus yang sama namun dengan menggunakan metode regresi *weibull*. Dari penelitiannya juga disimpulkan bahwa faktor-faktor yang mempengaruhi laju perbaikan kondisi klinis pasien penderita *stroke* di RSUD Haji Surabaya adalah usia, penyakit jantung, *diabetes mellitus*, hiperkolesterol, TIA, dan jenis *stroke*. Quraisy (2013) mengkaji tentang bentuk estimasi parameter, pengujian hipotesis pada model regresi bivariat weibull dan penerapannya pada kasus demam berdarah di RSUD Haji Surabaya pada tahun 2011. Dalam mendapatkan estimasi parameter menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), sedangkan pengujian hipotesis model regresi bivariat weibull menggunakan *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT). Penelitiannya menunjukkan untuk estimasi parameter model regresi bivariat weibull dengan metode maksimum likelihood (MLE) menghasilkan fungsi yang tidak *closed form* sehingga menggunakan metode iterasi *Newton-Raphson*. Sedangkan untuk pengujian hipotesis menggunakan uji serentak dan uji parsial dengan statistik uji yang berdistribusi *chi square*.

Sama seperti analisis regresi linier, hubungan antara variabel prediktor dan variabel respon pada analisis regresi weibull dianggap konstan untuk setiap lokasi geografis, sehingga penaksir parameter yang didapat juga bersifat global untuk setiap lokasi. Dewasa ini telah banyak penelitian yang mengkaji hubungan antara variabel prediktor dan respon dengan mempertimbangkan unsur lokasi (spasial) seperti *Geographically Weighted Regression* (GWR), *Geographically Weighted Poisson Regression* (GWPR) dan *Geographically Weighted Logistic Regression* (GWLR). *Geographically Weighted Regression* (GWR) merupakan pemodelan spasial dimana variabel responnya berdistribusi normal. Nurdin

(2008) telah melakukan estimasi dan pengujian hipotesis GWR. Estimasi model GWR menggunakan *Weighted Least Square* (WLS). Santoso (2012) meneliti tentang faktor-faktor eksternal pneumonia balita di Jawa Timur dengan GWR, dari hasil penelitiannya disimpulkan bahwa pemberian vitamin A dan adanya imunisasi balita merupakan faktor eksternal yang berpengaruh pada pneumonia. *Geographically Weighted Poisson Regression* (GWPR) merupakan pemodelan spasial dimana variabel responnya berdistribusi poisson. Nakaya, Fotheringham, Brunson, and Charlton (2005) telah melakukan penelitian GWPR sebagai perpaduan antara dua metode statistik dalam pemetaan penyakit yaitu dengan metode *kernel mapping* & model regresi poisson. Metode kernel dalam epidemiologi penyakit digunakan untuk memetakan variasi dari penyakit atau tingkat kesehatan, sedangkan GWPR digunakan untuk mengetahui hubungan antara variabel kesehatan (Y) dan variabel sosiodemografi dan lingkungan. *Geographically Weighted Logistic Regression* (GWLR) merupakan pemodelan spasial dimana variabel responnya berdistribusi binomial. Saefuddin, Setiabudi, and Fitrianto (2012) meneliti tentang perbandingan antara regresi logistik dan GWLR yang diterapkan pada kasus kemiskinan di Indonesia. Dari penelitiannya dapat disimpulkan bahwa metode GWLR lebih sesuai untuk diaplikasikan pada kasus ini dikarenakan GWLR menyediakan nilai estimasi parameter tertentu pada setiap wilayah.

Penelitian-penelitian di atas menunjukkan bahwa metode *Geographically Weighted Regression* untuk regresi linier, poisson dan logistik telah banyak digunakan, namun masih belum ada penelitian spasial yang meneliti tentang regresi weibull. Maka dalam penelitian ini akan meneliti model *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR). *Univariate* dikarenakan variabel respon berjumlah satu. Dari hasil penelitian ini akan didapatkan penaksir parameter model GWUWR, statistik uji dan juga penerapannya pada kasus riil.

Data yang digunakan merupakan data konsentrasi *Chemical Oxygen Demand* (COD) sungai di Surabaya dan faktor-faktor yang mempengaruhinya. *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR) pada penelitian ini diterapkan pada kasus pencemaran sungai di Surabaya. Hal ini dikarenakan tingkat pencemaran sungai di Surabaya termasuk dalam kategori

yang cukup tinggi. Sudah tidak ada air sungai yang masuk kategori mutu air kelas 1 atau sebagai air baku air minum. Hanya ada 3 titik lokasi yang memenuhi baku mutu air yaitu saluran darmo di pompa air darmo, saluran kenari di pompa air kenari dan kali pegirian di jalan undaan. Sedangkan titik-titik lokasi yang lainnya tidak sesuai dengan baku mutu air (Badan Lingkungan Hidup, 2013).

Sebagai contoh, air sungai Surabaya di jembatan Merr II yang masuk dalam kelas air 3 atau sebagai sarana pembudidayaan ikan air tawar, air payau, peternakan dan mengairi pertamanan, pada November 2013 memiliki kadar COD sebesar 69,063 mg/liter, dimana telah melebihi baku mutu untuk COD yang seharusnya sebesar 50 mg/liter. Lalu air sungai Kalimas di jembatan Keputran Selatan yang masuk dalam kelas air 3 pada November 2013 memiliki kadar COD 80,941 mg/liter yang seharusnya baku mutunya sebesar 50 mg/liter (Badan Lingkungan Hidup, 2013). Ukuran baku mutu air tercantum dalam Peraturan Daerah Kota Surabaya No.2 Tahun 2004.

Salah satu cara untuk menilai seberapa besar pencemaran air yaitu dengan melihat kandungan oksigen yang terlarut di dalam air. Pada umumnya air yang telah tercemar kandungan oksigennya sangat rendah. Hal ini dapat terjadi karena oksigen yang terlarut di dalam air diserap oleh mikroorganisme untuk memecah bahan buangan organik sehingga menjadi bahan yang mudah menguap dan berbau busuk. *Biochemical Oxygen Demand* (BOD) dan *Chemical Oxygen Demand* (COD) menunjukkan jumlah oksigen terlarut yang dibutuhkan oleh organisme hidup untuk menguraikan atau mengoksidasi bahan-bahan buangan di dalam air. BOD dan COD digunakan sebagai parameter pencemaran air dan baku mutu air limbah (Kristanto, 2002). Semakin besar angka BOD dan COD menunjukkan bahwa tingkat pengotoran air limbah semakin besar (Environmental Protection Agency, 2006).

Salah satu tujuan penelitian ini yaitu mengetahui faktor apa saja yang berpengaruh terhadap *Chemical Oxygen Demand* (COD) sungai di Surabaya dengan mempertimbangkan aspek spasial. Aspek spasial berkaitan dengan perbedaan karakteristik sungai seperti lebar sungai, kedalaman sungai, dan suhu air sungai.

Variabel respon (kadar COD) dalam penelitian ini mengikuti distribusi weibull. Terdapat keterkaitan antara distribusi weibull dengan kadar *Chemical Oxygen Demand* (COD). Weibull berhubungan dengan *reliability* (keandalan) dan *failure* (kegagalan). Di dalam permasalahan ini, definisi dari *failure* (kegagalan) yaitu apabila kadar COD di sungai melebihi ambang batas baku mutu air sungai untuk parameter COD, atau dengan kata lain air sungai telah tercemar. Batas baku mutu air kelas 1 untuk parameter COD maksimal 10 mg/liter; 25 mg/liter untuk air kelas 2; 50 mg/liter untuk air kelas 3 dan 100 mg/liter untuk air kelas 4 (Peraturan Daerah Kota Surabaya No.2, 2004).

Penelitian sebelumnya tentang parameter kualitas air (BOD, COD) telah banyak dilakukan. Chang (2008) meneliti tentang *spatial pattern* kualitas air pada 118 titik lokasi di cekungan sungai Han, Korea Selatan untuk 8 parameter pemeriksaan yaitu *temperature*, *pH*, *dissolved oxygen (DO)*, *biochemical oxygen demand (BOD)*, *chemical oxygen demand (COD)*, *suspended sediment (SS)*, *total phosphorus (TP)* and *total nitrogen (TN)*. Dari penelitiannya disimpulkan bahwa model regresi spasial menunjukkan hasil yang lebih baik apabila dibandingkan dengan model OLS dalam hal variasi kualitas air. Faktor topografi dan faktor tanah menunjukkan variasi dalam pH, COD, BOD dan SS. Lumaela (2013) meneliti tentang pemodelan *Chemical Oxygen Demand* (COD) sungai di Surabaya dengan metode *Mixed Geographically Weighted Regression* (MGWR), diperoleh kesimpulan bahwa pemodelan COD sungai di Surabaya dengan GWR memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan MGWR, dengan nilai R^2 sebesar 73,8% pada fungsi kernel *Adaptive Bisquare*. Variabel yang signifikan antara lain kecepatan aliran air, debit air sungai, Fosfat, Nitrat, Amonia, dan Nitrit. Khaulasari (2013) melanjutkan meneliti pemodelan BOD dan COD sungai di Surabaya dengan metode *Mixed Geographically Weighted Regression Multivariate* (MGWRM). Ozkan, akin, and ozkan (2013) meneliti tentang prediksi COD dan pembuangan SS menggunakan metode statistik *design experiment* dan *neural network* pada limbah industri gula. Variabel independen yang mempengaruhi kadar COD dan SS antara lain jumlah bahan kimia, pH dan tingkat pencampuran. Metode *backpropagation Artificial Neural Network* (ANN) digunakan untuk mengembangkan hubungan model terhadap jumlah buangan

COD. Disimpulkan bahwa prediksi *Artificial Neural Network* (ANN) lebih akurat daripada model regresi.

1.2 Permasalahan Penelitian

Berdasarkan latar belakang, maka permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini antara lain :

1. Bagaimana mendapatkan penaksir parameter untuk model *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR) ?
2. Bagaimana mendapatkan statistik uji pada model *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR) ?
3. Faktor-faktor apa saja yang berpengaruh terhadap *Chemical Oxygen Demand* (COD) di sungai Surabaya berdasarkan model *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR) ?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini antara lain :

1. Mendapatkan penaksir parameter model *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR).
2. Mendapatkan statistik uji model *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR).
3. Mendapatkan faktor-faktor yang berpengaruh pada *Chemical Oxygen Demand* (COD) di sungai Surabaya berdasarkan model *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR).

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang ingin diperoleh dari penelitian ini antara lain :

1. Memberikan informasi pada instansi terkait sebagai bahan evaluasi sebagai alat pengambil keputusan terkait masalah pencemaran air sungai.
2. Menambah wawasan tentang metode *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR) yang diterapkan pada masalah pencemaran lingkungan.

1.5 Batasan Penelitian

Batasan masalah dalam penelitian ini yaitu menggunakan data COD (*Chemical Oxygen Demand*) sebagai indikator pencemaran sungai Surabaya bulan November 2013 yang dianalisis secara univariat. Penaksiran parameter menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), sedangkan untuk statistik uji menggunakan *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT). Dalam mencari pembobot digunakan fungsi adaptif Bisquare.

halaman ini sengaja dikosongkan

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Distribusi Weibull

Awal mula penemuan distribusi weibull berlangsung antara 1922 dan 1943. Proses ini bermula pada tiga kelompok orang yang bekerja secara mandiri dengan tujuan yang sangat berbeda, sehingga membentuk sebuah rantai dari tiga link. WALODDI WEIBULL (1887-1979) adalah link terakhir rantai ini. Nama distribusi ini diambil dari nama Waloddi Weibull karena Waloddi Weibull yang telah menyebarkan distribusi secara internasional dan antar cabang ilmu pengetahuan (Rinne, 2009).

Professor Swedia, Waloddi Weibull (1951) menulis sebuah paper berjudul “*A Statistical Distribution Function of Wide Applicability*”, yang dikenal sebagai distribusi Weibull dan menyatakan "pengalaman telah menunjukkan bahwa dalam banyak kasus, pengamatan yang sesuai itu lebih baik daripada fungsi distribusi terkenal lainnya". Akhirnya, distribusi Weibull menjadi alat yang paling berguna dalam keandalan karena karakteristik yang unik dan berbagai macam penerapan, terutama ketika berkaitan dalam menggambarkan distribusi dari waktu kegagalan atau *Time To Failure* (TTF) suatu komponen mekanis atau listrik atau sistem (Han, 2006).

Distribusi weibul terbagi menjadi dua dan tiga parameter. Fungsi kepadatan probabilitas (FKP) dari distribusi Weibull dua parameter adalah

$$f(y|\theta, \sigma) = \frac{\sigma}{\theta^\sigma} (y)^{\sigma-1} \exp\left(-\left(\frac{y}{\theta}\right)^\sigma\right); y \geq 0; \theta; \sigma > 0 \quad (2.1)$$

Sedangkan fungsi kepadatan probabilitas (FKP) dari distribusi Weibull tiga parameter adalah (Rinne, 2009)

$$f(y|\theta, \sigma, \delta) = \frac{\sigma}{\theta^\sigma} (y - \delta)^{\sigma-1} \exp\left(-\left(\frac{y - \delta}{\theta}\right)^\sigma\right); y \geq \delta \geq 0; \theta; \sigma > 0 \quad (2.2)$$

Dimana θ merupakan parameter “scale”, σ merupakan parameter “shape” dan δ merupakan parameter “location”. Fungsi kumulatif dari distribusi weibull tiga parameter ini yaitu :

$$\begin{aligned}
 F(y) &= \int_{\delta}^{\infty} f(y|\theta, \sigma, \delta) dy \\
 &= \int_{\delta}^{\infty} \frac{\sigma}{\theta^{\sigma}} (y - \delta)^{\sigma-1} \exp\left(-\left(\frac{y - \delta}{\theta}\right)^{\sigma}\right) dy \\
 &= 1 - \exp\left(-\left(\frac{y - \delta}{\theta}\right)^{\sigma}\right)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.2 Model Regresi Univariat Weibull

Model regresi univariat Weibull merupakan model regresi dimana variabel respon Y berdistribusi Weibull dengan variabel prediktor X_1, X_2, \dots, X_k . Univariat artinya jumlah variabel respon hanya satu. Bentuk matriks dari variabel respon, variabel prediktor dan parameter regresi weibull yaitu

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{(n \times 1)} ; \quad \mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{1.1} & x_{1.2} & \cdots & x_{1.n} \\ x_{2.1} & x_{2.2} & \cdots & x_{2.n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k.1} & x_{k.2} & \cdots & x_{k.n} \end{bmatrix}_{(k+1) \times n} ; \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}_{(k+1) \times 1}$$

Jika model : $\theta = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k) = \exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}) = e^{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}}$

Maka fungsi kepadatan probabilitas dari model regresi univariat weibull yaitu

$$f(y|\boldsymbol{\beta}, \sigma, \delta) = \frac{\sigma}{\left(e^{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}}\right)^{\sigma}} (y - \delta)^{\sigma-1} e^{\left(-\left(\frac{y - \delta}{e^{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}}}\right)^{\sigma}\right)} \tag{2.4}$$

2.2.1 Estimasi Parameter Model Regresi Weibull

Estimasi parameter model regresi weibull menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) yaitu dengan memaksimumkan fungsi *likelihood* (Casella & Berger, 2002). *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) digunakan

apabila distribusi data diketahui. Berdasarkan persamaan (2.4) diperoleh fungsi *Likelihood* sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 L(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \delta | y_1, y_2, \dots, y_n) &= \prod_{i=1}^n f(y_i) = \prod_{i=1}^n \frac{\sigma}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}\right)^\sigma} (y_i - \delta)^{\sigma-1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}\right)^\sigma\right)} \\
 &= \sigma^n \frac{1}{\left(e^{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}\right)^\sigma} \prod_{i=1}^n (y_i - \delta)^{\sigma-1} e^{\left(-\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}\right)^\sigma\right)} \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

dan fungsi logaritma natural *likelihood* pada persamaan (2.5) :

$$\begin{aligned}
 \ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \delta | y_1, y_2, \dots, y_n) &= \ln \left(\frac{\sigma^n}{\left(e^{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}\right)^\sigma} \prod_{i=1}^n (y_i - \delta)^{\sigma-1} e^{\left(-\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}\right)^\sigma\right)} \right) \quad (2.6) \\
 &= n \ln \sigma - \sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + (\sigma - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta) + \left(-\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \right)
 \end{aligned}$$

Parameter regresi univariat weibull dapat diperoleh dengan mencari turunan parsial pertama fungsi *ln likelihood* (2.6) terhadap parameter $\boldsymbol{\beta}^T$, σ dan δ . Turunan pertama fungsi *ln likelihood* (2.6) terhadap parameter $\boldsymbol{\beta}^T$ yaitu :

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \delta | y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \\
 &= \frac{\partial \left(n \ln \sigma - \sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + (\sigma - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta) - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \right) \right)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \quad (2.7) \\
 &= -\sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \mathbf{x}_i \sigma \right)
 \end{aligned}$$

Turunan pertama fungsi *ln likelihood* (2.6) terhadap parameter σ yaitu :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \delta | y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial \sigma} \\
&= \frac{\partial \left(n \ln \sigma - \sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + (\sigma - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta) - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \right) \right)}{\partial \sigma} \quad (2.8) \\
&= \frac{n}{\sigma} - \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta) - 0 - \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \ln \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right) \right)
\end{aligned}$$

Turunan pertama fungsi *ln likelihood* (2.6) terhadap parameter δ yaitu :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \delta | y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial \delta} \\
&= \frac{\partial \left(n \ln \sigma - \sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + (\sigma - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta) - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \right) \right)}{\partial \delta} \quad (2.9) \\
&= -(\sigma - 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i - \delta} \right) + \sigma \sum_{i=1}^n \left(\frac{(y_i - \delta)^{\sigma-1}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \sigma}} \right)
\end{aligned}$$

Setelah mendapatkan penurunan pertama untuk setiap parameter, lalu disamakan dengan nol dan dicari solusinya. Namun didapatkan hasil yang implisit untuk setiap parameternya dikarenakan masih terdapat parameter dalam persamaan yang terbentuk. Untuk mengatasi hal tersebut maka digunakan iterasi *Newton Raphson* (Cameron & Triverdi, 2005). Berikut langkah-langkah dalam metode iterasi *Newton Raphson* :

$$1. \text{ Menentukan nilai taksiran awal parameter } \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{(0)} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(0)}^T & \hat{\sigma}_{(0)} & \hat{\delta}_{(0)} \end{bmatrix}^T \quad (2.10)$$

untuk taksiran awal parameter $\hat{\boldsymbol{\beta}}_0$ menggunakan metode *Ordinary Least*

Square (OLS) : $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(0)} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$

$$\text{dimana } \mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kn} \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}^T$$

2. Membentuk vektor gradien \mathbf{g} dengan k peubah parameter yang ditaksir.

$$\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{(m)}) = \left(\frac{\partial \ln L(\dots)}{\partial \boldsymbol{\beta}}, \frac{\partial \ln L(\dots)}{\partial \sigma}, \frac{\partial \ln L(\dots)}{\partial \delta} \right)^T \quad (2.11)$$

3. Membuat matriks Hessian (\mathbf{H})

$$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{(m)})_{(k+3) \times (k+3)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\dots)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T \partial \boldsymbol{\beta}} & \frac{\partial^2 \ln L(\dots)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T \partial \sigma} & \frac{\partial^2 \ln L(\dots)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T \partial \delta} \\ & \frac{\partial^2 \ln L(\dots)}{\partial \sigma^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\dots)}{\partial \sigma \partial \delta} \\ \text{simetris} & & \frac{\partial^2 \ln L(\dots)}{\partial \delta^2} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Matriks Hessian diperoleh dari turunan parsial kedua fungsi *ln likelihood* (2.6) terhadap masing-masing parameter.

4. Mensubstitusikan nilai $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{(0)}$ ke dalam elemen-elemen vektor $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{(0)})$ dan matriks $\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{(0)})$

5. Mulai dari $m = 0$ dilakukan iterasi pada persamaan

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{(m)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{(m)}) \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{(m)}) \quad (2.13)$$

Nilai $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{(m)}$ merupakan sekumpulan penaksir parameter yang konvergen saat iterasi ke- m

Jika belum mendapatkan penaksir parameter yang konvergen, maka dilanjutkan kembali ke langkah 5 hingga iterasi ke $m = m + 1$. Iterasi akan berhenti apabila nilai dari $\|\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{(m+1)} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{(m)}\| \leq \varepsilon$, dan ε adalah bilangan yang sangat kecil, misal 0,0001.

2.2.2 Pengujian Parameter Model Regresi Weibull

Pengujian parameter model regresi weibull menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT). Pengujian parameter dilakukan melalui uji hipotesis yang mana dibedakan menjadi dua yaitu uji serentak dan uji parsial. Pengujian ini dilakukan sebagai alat pengambil keputusan.

a. Uji Serentak (parameter β)

Parameter yang diuji yaitu β yang diuji secara bersama-sama. Hipotesis yang digunakan

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

$$H_1 : \text{minimal ada satu } \beta_j \neq 0 ; j = 1, 2, \dots, k$$

Himpunan parameter di bawah populasi (H_1) adalah

$$\Omega = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k, \sigma, \delta) = (\beta, \sigma, \delta)$$

Himpunan parameter di bawah H_0 adalah

$$\omega = (\beta_0, \sigma, \delta)$$

Langkah selanjutnya yaitu memaksimumkan fungsi *likelihood* di bawah populasi yaitu $L(\Omega)$ dan di bawah H_0 yaitu $L(\omega)$ dimana $L(\hat{\Omega})$ merupakan nilai *likelihood* untuk model lengkap dengan menyertakan semua variabel prediktor dan $L(\hat{\omega})$ merupakan nilai *likelihood* untuk model tanpa menyertakan variabel prediktor.

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^n f(y_i) = \prod_{i=1}^n \frac{\sigma}{(e^{x_i^T \beta})^\sigma} (y_i - \delta)^{\sigma-1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta}{e^{x_i^T \beta}} \right)^\sigma \right)} \quad (2.14)$$

$$L(\hat{\Omega}) = \max_{\Omega} L(\Omega)$$

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^n f(y_i) = \prod_{i=1}^n \frac{\sigma}{(e^{\beta_0})^\sigma} (y_i - \delta)^{\sigma-1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta}{e^{\beta_0}} \right)^\sigma \right)} \quad (2.15)$$

$$L(\hat{\omega}) = \max_{\omega} L(\omega)$$

Setelah itu menghitung *odds ratio* (Λ) dan statistik uji (G^2)

$$\Lambda = \left(\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \right) = \left(\frac{\prod_{i=1}^n \frac{\hat{\sigma}}{(e^{\hat{\rho}_0})^{\hat{\sigma}}} (y_i - \hat{\delta})^{\hat{\sigma}-1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \hat{\delta}}{e^{\hat{\rho}_0}} \right)^{\hat{\sigma}} \right)}}{\prod_{i=1}^n \frac{\hat{\sigma}}{(e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}})^{\hat{\sigma}}} (y_i - \hat{\delta})^{\hat{\sigma}-1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \hat{\delta}}{e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\beta}}} \right)^{\hat{\sigma}} \right)}} \right) \quad (2.16)$$

Statistik Uji : $G^2 = -2 \ln \Lambda$

Kriteria penolakan : Tolak H_0 jika $G^2 > \chi_{k,\alpha}^2$

b. Uji Parsial (parameter β)

Merupakan pengujian seluruh parameter β secara parsial. Berikut langkah-langkah pengujiannya :

Hipotesis :

$$H_0 : \beta_j = 0$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0 ; j = 1, 2, \dots, k$$

Statistik uji :

$$Z_{hit} = \frac{\hat{\beta}_j}{SE(\hat{\beta}_j)} \quad \text{dimana} \quad SE(\hat{\beta}_j) = \sqrt{\text{var}(\hat{\beta}_j)} \quad (2.17)$$

$\text{var}(\hat{\beta}_j)$ merupakan elemen diagonal ke $j+1$ dari $-H^{-1}(\hat{\beta})$

Kriteria penolakan : Tolak H_0 jika $|Z_{hit}| > Z_{\alpha/2}$

2.3 Anderson Darling

Pengujian Anderson Darling merupakan salah satu metode statistik yang digunakan dalam pengujian kesesuaian distribusi. Adapun hipotesis yang digunakan yaitu

$$H_0 : F_{(y)} = F_{(y)}^0 \quad (\text{variabel dependen sesuai dengan distribusi dugaan})$$

$$H_1 : F_{(y)} \neq F_{(y)}^0 \quad (\text{variabel dependen tidak sesuai dengan distribusi dugaan})$$

Statistik uji : (Shin, Jung, Jeong, & Heo, 2011)

$$A_n^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \left(\ln F_{(y_i)}^0 + \ln \left(1 - F_{(y_{n+1-i})}^0 \right) \right) \quad (2.18)$$

Dimana

$F_{(y_i)}^0 = \text{cumulative distribution function}$ dari distribusi dugaan

n = ukuran sampel

Kriteria penolakan : Tolak H_0 jika nilai $A_{hit}^2 > A_\alpha^2$

2.4 Multikolinearitas

Salah satu syarat yang harus dipenuhi dalam regresi dengan beberapa variabel prediktor adalah tidak adanya korelasi antara satu variabel prediktor dengan variabel prediktor yang lain, atau dengan kata lain tidak ada multikolinieritas. Adanya korelasi dalam model regresi menyebabkan taksiran parameter regresi yang dihasilkan akan memiliki error yang sangat besar.

Salah satu cara untuk mendeteksi adanya kasus kolinieritas menurut Gujarati (2004) dapat dilihat melalui *Variance Inflation Factors* (VIF) yang dinyatakan sebagai berikut :

$$VIF_j = \frac{1}{1 - R_j^2} \quad (2.19)$$

R_j^2 adalah koefisien determinasi antara x_j dengan variabel prediktor lainnya. VIF_j yang lebih besar dari 10 menunjukkan adanya kolinieritas antar variabel prediktor. Solusi untuk mengatasi adanya kasus tersebut adalah dengan mengeluarkan variabel prediktor yang tidak signifikan dan meregresikan kembali variabel-variabel prediktor yang signifikan.

2.5 Matriks Pembobot

Peran pembobot pada data spasial sangat penting karena nilai pembobot ini mewakili letak data observasi satu dengan lainnya. Untuk menentukan besarnya pembobot untuk masing-masing lokasi yang berbeda pada model digunakan fungsi kernel.

Fungsi kernel digunakan untuk mengestimasi parameter dalam model jika fungsi jarak (w_j) adalah fungsi yang kontinu dan monoton turun (Hasbi,

2011). Menurut Fotheringham, Brunson, and Charlton (2002), salah satu pembobot yang terbentuk dengan menggunakan fungsi kernel adalah fungsi jarak *Bisquare*.

$$w_{ij} = \begin{cases} \left(1 - \left(d_{ij}/b\right)^2\right)^2, & \text{untuk } d_{ij} \leq b \\ 0 & , \text{untuk } d_{ij} > b \end{cases} \quad (2.21)$$

dengan $d_{ij} = \sqrt{(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2}$ adalah jarak *eucliden* antara lokasi (u_i, v_i) ke lokasi (u_j, v_j) dan b adalah parameter non negatif yang diketahui dan biasanya disebut parameter penghalus (*bandwidth*).

Bandwidth dapat dianalogikan sebagai radius dari suatu lingkaran, sehingga sebuah titik yang berada di dalam radius lingkaran masih dianggap memiliki pengaruh. Di dalam pembentukan sebuah model spasial, *bandwidth* berperan sangat penting karena akan berpengaruh pada ketepatan model terhadap data, yaitu mengatur varians dan bias dari model.

Nilai *bandwidth* yang sangat kecil akan menyebabkan varians menjadi semakin besar. Itu dikarenakan jika nilai *bandwidth* sangat kecil maka akan semakin sedikit pengamatan yang berada dalam radius *bandwidth*, sehingga model yang diperoleh akan sangat kasar (*under smoothing*) karena hasil estimasi dengan menggunakan sedikit pengamatan. Sebaliknya nilai *bandwidth* yang besar dapat menimbulkan bias yang semakin besar. Sebab jika nilai *bandwidth* sangat besar maka akan semakin banyak pengamatan yang berada dalam radius *bandwidth*, sehingga model yang diperoleh akan terlampau halus (*over smoothing*) karena hasil estimasi dengan menggunakan banyak pengamatan.

Ada beberapa metode yang digunakan untuk memilih *bandwidth* optimum, salah satu diantaranya adalah metode *Cross Validation* atau CV (Fotheringham et al., 2002) yang secara matematis didefinisikan sebagai berikut:

$$CV = \sum_{i=1}^n \left(f_i - \hat{f}_{\neq i}(b) \right)^2 \quad (2.22)$$

Dengan f_i merupakan *pdf* distribusi weibull dan $\hat{f}_{\neq i}(b)$ adalah *pdf* dari regresi weibull f_i dimana pengamatan di lokasi (u_i, v_i) dihilangkan dari proses

estimasi. Untuk mendapatkan nilai b yang optimal maka diperoleh dari b yang menghasilkan nilai CV yang minimum.

2.6 Geographically Weighted Univariate Weibull Regression (GWUWR)

Seperti halnya model *Geographically Weighted Regression* (GWR), model *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR) adalah pengembangan dari model regresi univariat weibul dimana setiap parameter dihitung pada setiap titik lokasi, sehingga setiap titik lokasi geografis mempunyai nilai parameter regresi yang berbeda-beda. Model *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR) merupakan pengembangan dari model regresi global. Variabel respon y dalam model GWUWR diprediksi dengan variabel prediktor yang masing-masing koefisien regresinya bergantung pada lokasi dimana data tersebut diamati. Model :

$$\begin{aligned}\theta_i(u_i, v_i) &= \exp(\beta_0(u_i, v_i) + \beta_1(u_i, v_i)x_{1i} + \beta_2(u_i, v_i)x_{2i} + \dots + \beta_k(u_i, v_i)x_{ki}) \\ &= \exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)) = e^{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}\end{aligned}$$

Sehingga fungsi kepadatan probabilitas dari y_i adalah

$$\begin{aligned}f(y_i | \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i), \sigma(u_i, v_i), \delta(u_i, v_i)) \\ = \frac{\sigma(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \left(\frac{y_i - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)-1} e^{-\left(\frac{y_i - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)}}\end{aligned} \quad (2.23)$$

2.7 Pencemaran Air

Pengertian pencemaran air dijelaskan di dalam Peraturan Pemerintah yang merupakan lanjutan dari pengertian pencemaran lingkungan hidup yang dijelaskan dalam undang-undang. Pencemaran lingkungan hidup adalah masuk atau dimasukkannya makhluk hidup, zat, energi, dan atau komponen lain ke dalam lingkungan hidup oleh kegiatan manusia sehingga melampaui baku mutu lingkungan hidup yang telah ditetapkan (Undang-Undang Republik Indonesia No.32, 2009). Sedangkan pencemaran air adalah masuknya atau dimasukkannya makhluk hidup, zat, energi dan atau komponen lain ke dalam air oleh kegiatan manusia, sehingga kualitas air turun sampai ke tingkat tertentu yang

menyebabkan air tidak dapat berfungsi sesuai dengan peruntukannya (Peraturan Pemerintah Republik Indonesia No.82, 2001).

Regulasi yang menjadi dasar pemantauan kualitas air permukaan adalah PP No. 82 Tahun 2001 dan Peraturan Daerah Kota Surabaya No.2 Tahun 2004 tentang Pengelolaan Kualitas Air dan Pengendalian Pencemaran Air. Apabila persyaratan kualitas air tidak memenuhi untuk peruntukan tertentu, maka air tidak dapat digunakan dan tidak mempunyai manfaat.

Menurut Peraturan Daerah Kota Surabaya No.2 (2004), klasifikasi mutu air ditetapkan ke dalam empat kelas yaitu :

- a. Kelas 1, yaitu air yang peruntukannya dapat digunakan untuk air baku air minum, dan atau peruntukan lain yang mensyaratkan mutu air yang sama dengan kegunaan tersebut.
- b. Kelas 2, yaitu air yang peruntukannya dapat digunakan untuk sarana/prasarana rekreasi air, pembudidayaan ikan air tawar dan air payau, peternakan, air untuk mengairi pertamanan, dan/ atau peruntukan lain yang mensyaratkan mutu air yang sama dengan kegunaan tersebut.
- c. Kelas 3, yaitu air yang peruntukannya dapat digunakan untuk pembudidayaan ikan air tawar dan air payau, peternakan, air untuk mengairi pertamanan, dan/atau peruntukan lain yang mensyaratkan mutu air yang sama dengan kegunaan tersebut.
- d. Kelas 4, yaitu air yang peruntukannya dapat digunakan untuk mengairi pertamanan dan/atau peruntukan lain yang mensyaratkan mutu air yang sama dengan kegunaan tersebut.

Baku mutu air adalah ukuran batas atau kadar makhluk hidup, zat, energi, atau komponen yang ada atau harus ada dan atau unsur pencemar yang ditenggang keberadaannya di dalam air. Baku mutu air limbah adalah ukuran batas atau kadar unsur pencemar dan atau jumlah unsur pencemar yang ditenggang keberadaannya dalam air limbah yang akan dibuang atau dilepas ke dalam sumber air dari suatu usaha dan atau kegiatan (Peraturan Pemerintah Republik Indonesia No.82, 2001).

2.7.1 Aspek Biokimia Pencemaran Air

Organisme pengurai aerobik umumnya terdiri dari mikroorganisme seperti bakteri yang selalu bekerja di dalam air, menguraikan senyawa-senyawa organik menjadi karbondioksida dan air. Bakteri lain mengubah amoniak dan nitrit menjadi nitrat. Untuk semua proses ini dibutuhkan oksigen. Jika jumlah bahan organik dalam air hanya sedikit, maka bakteri aerob akan dapat dengan mudah menguraikannya tanpa mengganggu keseimbangan oksigen dalam air. Oksigen yang digunakan akan segera tergantikan dengan cara-cara alamiah secepat bakteri menggunakannya. Tetapi jika jumlah bahan organik tersebut banyak, maka bakteri pengurai ini akan melipatgandakan diri. Hal ini pada umumnya akan mengakibatkan terjadinya kekurangan oksigen, seperti di rawa-rawa, dasar kolam dan danau yang airnya tidak mengalir (Kristanto, 2002).

Aktifitas bakteri aerobik tersebut dapat menurunkan kadar oksigen terlarut dalam air sampai ke titik nol. Jika sampai terjadi maka tugasnya akan diambil alih oleh organisme pengurai anaerobik yang umumnya juga berupa bakteri dan mengakibatkan pembusukan. Bakteri ini menghasilkan gas metana dan hidrogen sulfida yang berbau busuk (Kristanto, 2002).

Manusia terus-menerus membuang sampah organik ke dalam air sehingga menimbulkan kondisi anaerobik. Limbah yang kurang mendapat perlakuan, misal yang berasal dari pabrik kertas, kulit dan sebagainya, merupakan contoh nyata yang terus terjadi. Konsekuensi pembuangan limbah tersebut dapat menimbulkan kekurangan oksigen, oleh sebab itu para ilmuwan membuat patokan pengujian persyaratan kandungan oksigen dalam limbah yang dibedakan menjadi dua, yaitu

- a. Uji BOD (*Biochemical Oxygen Demand*) – uji kebutuhan oksigen biokimia
- b. Uji COD (*Chemical Oxygen Demand*) – uji kebutuhan oksigen kimia

2.7.2 Indikator Pencemaran Air

Beberapa sifat-sifat kimia fisika air yang umum diuji dan dapat digunakan sebagai indikator pencemaran air antara lain :

1. *Biochemical Oxygen Demand (BOD)*

Biochemical Oxygen Demand (BOD) adalah banyaknya oksigen yang dibutuhkan oleh mikroorganisme untuk menguraikan bahan-bahan organik (zat pencemar) yang terdapat di dalam air secara biokimia. BOD menunjukkan jumlah oksigen terlarut yang dibutuhkan oleh organisme hidup untuk menguraikan atau mengoksidasi bahan-bahan buangan di dalam air. Jadi nilai BOD tidak menunjukkan jumlah bahan organik yang sebenarnya, tetapi hanya mengukur skala relatif jumlah oksigen yang dibutuhkan untuk mengoksidasi bahan-bahan buangan tersebut. Jika konsumsi oksigen tinggi, yang ditunjukkan dengan semakin kecilnya sisa oksigen terlarut di dalam air, maka berarti kandungan bahan buangan yang membutuhkan oksigen adalah tinggi. Organisme hidup yang bersifat aerobik membutuhkan oksigen untuk proses reaksi biokimia, yaitu untuk mengoksidasi bahan organik, sintesis sel dan oksidasi sel (Kristanto, 2002).

BOD dapat diterima bila jumlah oksigen yang akan dihabiskan dalam waktu lima hari oleh organisme pengurai aerobik dalam suatu volume limbah pada suhu 20°C. Hasilnya dinyatakan dengan ppm. Jadi BOD sebesar 200 ppm berarti bahwa 200 mg oksigen akan dihabiskan oleh sampel limbah sebanyak 1 liter dalam waktu 5 hari pada suhu 20°C (Kristanto, 2002).

Uji BOD mempunyai beberapa kelemahan, diantaranya :

- a. Dalam uji BOD ikut terhitung oksigen yang dikonsumsi oleh bahan-bahan organik atau bahan-bahan tereduksi lainnya, yang disebut juga *Intermediate Oxygen Demand*.
- b. Uji BOD membutuhkan waktu yang cukup lama, yaitu lima hari.
- c. Uji BOD yang dilakukan selama lima hari masih belum dapat menunjukkan nilai total BOD, melainkan $\pm 68 \%$ dari total BOD.
- d. Uji BOD tergantung dari adanya senyawa penghambat di dalam air tersebut misalnya germisida seperti klorin yang dapat menghambat pertumbuhan mikroorganisme yang dibutuhkan untuk merombak bahan organik, sehingga hasil uji BOD kurang teliti (Kristanto, 2002).

BOD dan COD digunakan untuk memonitor kapasitas *self purification* badan air atau dengan kata lain sebagai parameter pencemaran air dan baku mutu air limbah. *Self purification* adalah pemulihan oleh proses alami baik secara total

ataupun sebagian kembali ke kondisi awal sungai dari bahan asing yang secara kualitas maupun kuantitas menyebabkan perubahan karakteristik fisik, kimia dan biologi yang terukur dari sungai. Pemeriksaan BOD diperlukan untuk menentukan beban pencemaran akibat air buangan penduduk atau industri, dan untuk mendesain sistem-sistem pengolahan biokimia bagi air yang tercemar tersebut (Status Lingkungan Hidup Daerah Kota Surabaya, 2011).

2. *Chemical Oxygen Demand (COD)*

Untuk mengetahui jumlah bahan organik di dalam air dapat dilakukan suatu uji yang lebih cepat dari uji BOD, yaitu berdasarkan reaksi kimia dari suatu bahan oksidan. Uji ini disebut dengan uji COD, yaitu suatu uji yang menentukan jumlah oksigen yang dibutuhkan oleh bahan oksidan, misalnya kalium dikromat, untuk mengoksidasi bahan-bahan organik yang terdapat di dalam air.

Banyak zat organik yang tidak mengalami penguraian biologis secara cepat berdasarkan pengujian BOD lima hari, tetapi senyawa-senyawa organik tersebut juga menurunkan kualitas air. Bakteri dapat mengoksidasi zat organik menjadi CO_2 dan H_2O , kalium dikromat dapat mengoksidasi lebih banyak lagi, sehingga menghasilkan nilai COD yang lebih tinggi dari BOD untuk air yang sama. Disamping itu bahan-bahan yang stabil terhadap reaksi biologi dan mikroorganisme dapat ikut teroksidasi dalam uji COD. 96 % hasil uji COD yang dilakukan selama 10 menit, kira-kira akan setara dengan hasil uji BOD selama 5 hari (Kristanto, 2002).

3. Nitrat (NO_3)

Nitrogen sebagai sumber nitrat terbanyak terdapat di udara, yaitu sebesar 78 % volume udara. Ada tiga tandon (gudang) nitrogen di alam, antara lain udara, senyawa anorganik (nitrat, nitrit, amoniak), dan senyawa organik (protein, asam urea). Hanya sedikit organisme yang dapat langsung memanfaatkan nitrogen udara. Tumbuhan dapat menghisap nitrogen dalam bentuk nitrat (NO_3).

Pengubahan dari nitrogen bebas di udara menjadi nitrat dapat dilakukan secara biologis maupun kimia. Transformasi ini disebut *fiksasi* (pengikatan) nitrogen. Halilantar mengakibatkan fiksasi kimia nitrogen. Ledakan petir yang melalui udara memberikan cukup energi untuk menyatukan nitrogen dan oksigen

membentuk nitrogen dioksida (NO_2). Gas ini bereaksi dengan air membentuk asam nitrat (NO_3) (Kristanto, 2002).

4. Amoniak (NH_3)

Keberadaan amoniak dalam air dapat menyebabkan berkurangnya daya ikat oksigen oleh butir-butir darah dan membuat nafsu makan ikan menurun. Kadar oksigen dan amoniak di dalam perairan berbanding terbalik, apabila amoniak meningkat maka kadar oksigen menjadi rendah. Kadar amoniak yang baik adalah kurang dari 1 ppm, sedangkan apabila kadar amoniak lebih dari 1 ppm, maka dapat membahayakan ikan dan organisme budidaya lainnya (Jaya, 2011).

Tumbuhan dan hewan yang telah mati akan diuraikan proteinnya oleh organisme pembusuk menjadi amoniak dan senyawa amonium. Nitrogen dalam kotoran dan air seni akan berakhir menjadi amoniak juga. Amoniak merupakan hasil tambahan penguraian (pembusukan) protein tumbuhan atau hewan, atau dalam kotorannya. Jadi, jika terdapat amoniak dalam air, ada kemungkinan kotoran hewan masuk. Amoniak dalam air tidak terlalu berbahaya jika air tersebut diberi klor (Kristanto, 2002).

5. Nitrit (NO_2)

Jika amoniak diubah menjadi nitrat, maka akan terdapat nitrit dalam air. Hal ini terjadi jika air tidak mengalir, khususnya di bagian dasar. Nitrit amat beracun di dalam air, tetapi tidak bertahan lama. Kandungan nitrogen di dalam air sebaiknya di bawah 0,3 ppm. Kandungan nitrogen di atas jumlah tersebut mengakibatkan ganggang tumbuh dengan subur. Jika kandungan nitrat di dalam air mencapai 45 ppm maka berbahaya untuk diminum. Nitrat tersebut akan berubah menjadi nitrit di perut. Keracunan nitrit akan mengakibatkan wajah membiru dan kematian (Kristanto, 2002).

6. Fosfat (PO_4)

Seperti halnya oksigen, unsur penting lainnya dalam suatu ekosistem adalah fosfor. Protein dan zat-zat organik lainnya mengandung fosfor. Perjalanan fosfor dalam daurnya mirip dengan daur nitrogen. Dalam ekosistem air, fosfor terdapat dalam tiga bentuk, yaitu senyawa fosfor anorganik seperti ortofosfat,

senyawa organik dalam protoplasma dan sebagai senyawa organik terlarut yang terbentuk karena kotoran atau tubuh organisme yang mengurai.

Eutrofikasi merupakan masalah lingkungan hidup yang diakibatkan oleh limbah fosfat yaitu pencemaran air yang disebabkan oleh munculnya *nutrient* yang berlebihan ke dalam ekosistem air. Air dikatakan eutrofik jika konsentrasi total phosphorus (TP) dalam air berada dalam rentang 35-100 µg/L. Sejatinya, eutrofikasi merupakan sebuah proses alamiah di mana danau mengalami penuaan secara bertahap dan menjadi lebih produktif bagi tumbuhnya biomassa.

Kondisi eutrofik sangat memungkinkan alga, tumbuhan air berukuran mikro, untuk tumbuh berkembang biak dengan pesat (*blooming*) akibat ketersediaan fosfat yang berlebihan serta kondisi lain yang memadai. Hal ini bisa dikenali dengan warna air yang menjadi kehijauan, berbau tak sedap, dan kekeruhannya yang menjadi semakin meningkat. Banyaknya eceng gondok yang bertebaran di rawa-rawa dan danau-danau juga disebabkan fosfat yang sangat berlebihan ini. Akibatnya, kualitas air di banyak ekosistem air menjadi sangat menurun. Rendahnya konsentrasi oksigen terlarut, bahkan sampai batas nol, menyebabkan makhluk hidup air seperti ikan dan spesies lainnya tidak bisa tumbuh dengan baik sehingga akhirnya mati.

Air biasanya mengandung fosfat anorganik terlarut. Fitoplankton dan tumbuhan air lainnya akan mengabsorpsi fosfat ini dan membentuk senyawa misalnya *adenosine triposfat* (ATP). Herbivora yang memakan tumbuhan tersebut akan mendapatkan fosfor tersebut. Jika tumbuhan dan hewan tersebut mati maka bakteri pengurai akan mengembalikan fosfor itu ke dalam air sebagai zat organik terlarut. Demikian pula dengan kotoran sisa metabolisme hidup dimana akhirnya bakteri menguraikan senyawa organik itu menjadi fosfor. Daur kembali dapat terulang.

Seperti halnya nitrogen, fosfor memasuki air melalui berbagai jalan yaitu kotoran, limbah, sisa pertanian, kotoran hewan, dan sisa tumbuhan dan hewan yang mati. Pencegahan pencemaran fosfor dapat dilakukan dengan melarang penggunaan deterjen yang mengandung fosfat, selain itu juga dengan mewajibkan pengolahan limbah industri dengan memberikan air kapur atau aluminium sulfat agar fosfatnya mengendap dan dapat dibuang (Kristanto, 2002).

7. Deterjen

Deterjen adalah golongan dari molekul organik yang dipergunakan sebagai pengganti sabun untuk pembersih supaya mendapatkan hasil yang lebih baik. Di dalam air zat ini menimbulkan buih dan selama proses aerasi buih tersebut berada di atas permukaan gelembung udara dan biasanya relatif tetap. Sebelum tahun 1965 deterjen ini disebut *Alkyl Benzene Sulfonate* (ABS) yang merupakan penyebab masalah busa karena tahan terhadap penguraian proses biologis. Setelah dikeluarkannya larangan penggunaan ABS, maka diganti dengan jenis lain dan dikenal dengan *Linear Alkyl Sulfonate* (LAS) dimana busa yang dihasilkan oleh LAS dapat diuraikan sehingga masalah busa teratasi. Bahan dasar deterjen adalah minyak nabati atau minyak bumi. Fraksi minyak bumi yang dipakai adalah senyawa hidrokarbon parafin dan olefin. Penghasil utama dari bahan ini adalah air limbah yang berasal dari rumah tangga atau pemukiman (Sugiharto, 2005).

2.7.3 Faktor Karakteristik Sungai

Bozem adalah kolam besar tempat menampung air, baik yang berasal dari air hujan maupun aliran sungai agar tidak banjir (Peraturan Daerah Kota Surabaya no.2, 2014).

Berikut merupakan variabel karakteristik sungai yang dapat mempengaruhi parameter kualitas air dalam menentukan tingkat pencemaran

1. Debit air sungai

Debit adalah jumlah aliran air yang melewati suatu penampang (sungai / saluran / mata air) per satuan waktu. Satuan debit dinyatakan dalam meter kubik per detik (m^3/detik). Debit sungai yang rendah menyebabkan bahan-bahan terlarut (yang mengandung zat anorganik) tidak terurai dengan sempurna. Penumpukan zat anorganik terlihat dengan tingginya konsentrasi COD (Agustira, Lubis, & Jamilah, 2013). Konsentrasi COD yang tinggi dengan debit sungai yang rendah menyebabkan oksigen yang masuk ke dalam air berkurang (Hendrasarie & Cahyarani, 2012).

2. Lebar dan kedalaman sungai

Lebar dan kedalaman sungai berpengaruh pada karakteristik fisik, kimia, dan biologi sungai. Sungai yang lebar dan dangkal akan mendapatkan cahaya matahari lebih banyak yang menyebabkan suhu air meningkat sehingga jumlah oksigen terlarut dalam air berkurang.

3. Kecepatan air

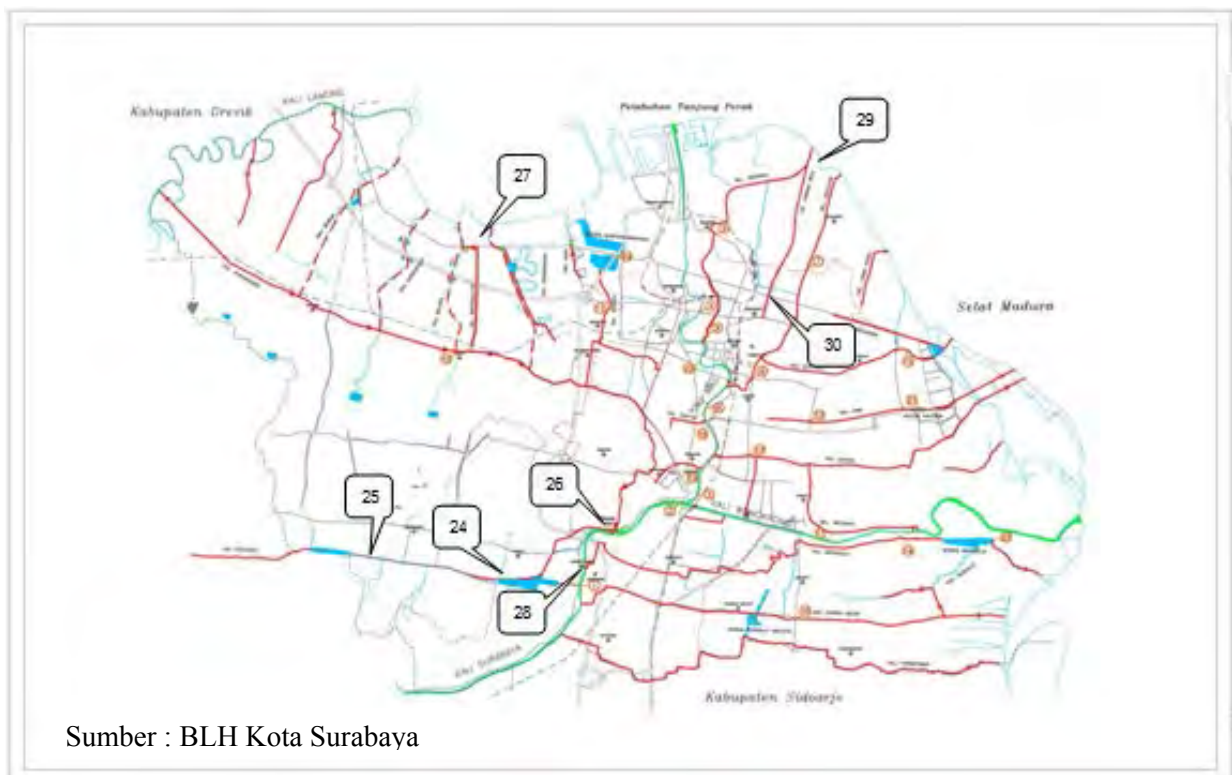
Menurut Arianto (2011) adanya kecepatan aliran air yang berbeda akan menghasilkan perubahan konsentrasi parameter COD yang berbeda. Arianto melakukan penelitian pada 4 lokasi dan hasilnya terdapat variasi perubahan konsentrasi COD yang terjadi akibat pengaruh perbedaan kecepatan di setiap titik-titik sampling.

BAB 3

METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Sumber Data

Data dalam penelitian ini menggunakan data sekunder mengenai indikator pencemaran air secara kimia atau *Chemical Oxygen Demand* (COD) di Kota Surabaya pada tahun 2013 dan faktor-faktor yang mempengaruhinya yang diperoleh dari Badan Lingkungan Hidup (BLH) Kota Surabaya. Data tersebut adalah jumlah kadar COD yang terdapat pada 30 titik lokasi Sungai Kota Surabaya. Selain itu, penelitian ini juga memperhatikan letak astronomis dari masing-masing titik pengamatan yaitu letak lintang dan letak bujur sebagai faktor pembobot geografisnya. Pada penelitian ini yang dijadikan unit observasi adalah 30 titik lokasi sungai di Surabaya.



Gambar 3.1 Lokasi Pemantauan air sungai tahun 2013

Adapun lokasi dari 30 titik sungai di Surabaya yaitu sebagai berikut.

Tabel 3.1 Titik Observasi Sungai Surabaya

No	Sungai	Titik Observasi
1	Kali Surabaya	Air badan air Kali Surabaya di Kedurus
2	Kali Surabaya	Air badan air Kali Surabaya di jembatan Wonokromo
3	Kalimas	Air badan air Kalimas di jembatan Ngagel
4	Kalimas	Air badan air Kalimas di jembatan Keputran Selatan
5	Kalimas	Air badan air Kalimas di jembatan Kebon Rojo
6	Kali Jeblokan	Air badan air Kali Jeblokan di Petojo
7	Kali Jeblokan	Air badan air Kali Jeblokan di Kedung Cowek
8	Kali Pegirian	Air badan air Kali Pegirian di Jl. Undaan
9	Kali Pegirian	Air badan air Kali Pegirian di Jl. Pegirian
10	Kali Banyuurip	Air badan air Kali Banyu Urip di jembatan Balongsari Tama
11	Kali Greges	Air badan air Kali Greges di jembatan Jl. Dupak
12	Kalidami	Air badan air Kalidami di jembatan Kali Dami
13	Kalibokor	Air badan air Kalibokor di jembatan Pucang
14	Kali Wonorejo	Air badan air Kali Wonorejo di Jembatan Kedung Baruk
15	Kali Kepiting	Air badan air Kali Kepiting di Jl. Sutorejo
16	Kali Kebon Agung	Air badan air Kali Kebon Agung di Rungkut Industri
17	Kali Wonokromo	Air badan air Kali Wonokromo di jembatan Merr II
18	Saluran Dinoyo	Air badan air saluran Dinoyo di pompa air Dinoyo
19	Saluran Darmo	Air badan air saluran Darmo di pompa air Darmo Kali
20	Saluran Kenari	Air badan air saluran Kenari di pompa air Kenari
21	Bozem Kalidami	Air badan air Bozem Kali Dami
22	Bozem Wonorejo	Air badan air Bozem Wonorejo
23	Bozem Morokrempangan	Air badan air bozem Morokrempangan
24	Bozem Kedurus	Air badan air Bozem Kedurus
25	Kali Makmur	Air badan air Kali Makmur di Lidah Kulon Jl. Bangkingan
26	Kali Banyu Urip	Air badan air Kali Banyu Urip di pompa air Gunungsari
27	Saluran Margomulyo	Air badan air saluran Margomulyo di Jl. Kalianak
28	Kali Krembangan	Air Badan Air Kali Krembangan di Jembatan Jl. Dumar Industri
29	Saluran Tambak Wedi	Air badan air saluran Tambak Wedi di pompa air Tambak Wedi
30	Saluran Tambak Wedi	Air badan air saluran Tambak Wedi di Jl. Kenjeran (makam WR Supratman)

3.2 Identifikasi Variabel

Variabel yang digunakan pada penelitian ini terbagi menjadi variabel respon dan beberapa variabel prediktor. Berikut merupakan variabel respon dan prediktor yang disajikan dalam tabel.

Tabel 3.2 Variabel Penelitian

Variabel	Variabel Respon	Satuan
Y	<i>Chemical Oxygen Demand (COD)</i>	mg/l
Variabel	Variabel Karakteristik Sungai	Satuan
X ₁	Lebar sungai	meter
X ₂	Kedalaman sungai	meter
X ₃	Kecepatan air	m/detik
X ₄	Debit sungai	m ³ /detik

Adapun penjelasan dari variabel-variabel prediktor yang digunakan yaitu :

1. Lebar dan kedalaman sungai

Lebar dan kedalaman sungai berpengaruh pada karakteristik fisik, kimia, dan biologi sungai. Sungai yang lebar dan dangkal akan mendapatkan cahaya matahari lebih banyak yang menyebabkan suhu air meningkat sehingga jumlah oksigen terlarut dalam air berkurang.

2. Debit sungai

Debit sungai yang rendah menyebabkan bahan-bahan terlarut (yang mengandung zat anorganik) tidak terurai dengan sempurna. Penumpukan zat anorganik terlihat dengan tingginya konsentrasi COD (Agustira et al., 2013). Konsentrasi COD yang tinggi dengan debit sungai yang rendah menyebabkan oksigen yang masuk ke dalam air berkurang (Hendrasarie & Cahyarani, 2012).

3. Kecepatan air

Adanya kecepatan aliran air yang berbeda akan menghasilkan perubahan konsentrasi parameter COD yang berbeda. Arianto (2011) melakukan penelitian pada 4 lokasi dan hasilnya terdapat variasi perubahan konsentrasi COD yang terjadi akibat pengaruh perbedaan kecepatan di setiap titik-titik sampling.

Berikut merupakan struktur data yang digunakan pada penelitian ini

Tabel 3.3 Struktur Data

Titik lokasi	Y	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	u _i	v _i
1	Y ₁	X _{1.1}	X _{2.1}	X _{3.1}	X _{4.1}	u ₁	v ₁
2	Y ₂	X _{1.2}	X _{2.2}	X _{3.2}	X _{4.2}	u ₂	v ₂
3	Y ₃	X _{1.3}	X _{2.3}	X _{3.3}	X _{4.3}	u ₃	v ₃
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30	Y ₃₀	X _{1.30}	X _{2.30}	X _{3.30}	X _{4.30}	u ₃₀	v ₃₀

Keterangan :

u_i : Koordinat bujur timur (BT)

v_i : Koordinat lintang selatan (LS)

Koordinat (u_i,v_i) ini yang akan digunakan dalam penentuan pembobot model GWUWR

3.3 Metode Penelitian

Sebelum melangkah pada pemodelan *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR), akan dimodelkan terlebih dahulu dengan menggunakan regresi univariat weibul. Setelah melakukan analisis regresi weibul, lalu dilanjutkan pada langkah-langkah analisis yang digunakan untuk menjawab tujuan dari penelitian antara lain sebagai berikut.

1. Memperoleh penaksir parameter untuk model *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR) dengan metode MLE

a. Menurunkan model *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR)

$$\begin{aligned}\theta_i(u_i, v_i) &= \exp(\beta_0(u_i, v_i) + \beta_1(u_i, v_i)x_{1i} + \beta_2(u_i, v_i)x_{2i} + \dots + \beta_k(u_i, v_i)x_{ki}) \\ &= \exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)) = e^{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}\end{aligned}$$

Fungsi kepadatan probabilitas dari y_i untuk model GWUWR tiga parameter :

$$f(y_i | \beta(u_i, v_i), \sigma(u_i, v_i), \delta(u_i, v_i))$$

$$= \frac{\sigma(u_i, v_i)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \beta(u_i, v_i)}\right)^{\sigma(u_i, v_i)}} (y_i - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i)-1} e^{\left(-\frac{(y_i - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i)}}{e^{\mathbf{x}_i^T \beta(u_i, v_i)}}\right)}$$

b. Membuat fungsi likelihood dari model GWUWR

$$L(\beta(u_i, v_i), \sigma(u_i, v_i), \delta(u_i, v_i) | y_1, y_2, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n f(y_i)$$

$$= \prod_{i=1}^n \frac{\sigma(u_i, v_i)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \beta(u_i, v_i)}\right)^{\sigma(u_i, v_i)}} (y_i - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i)-1} e^{\left(-\frac{(y_i - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i)}}{e^{\mathbf{x}_i^T \beta(u_i, v_i)}}\right)}$$

$$= \prod_{i=1}^n \sigma(u_i, v_i) \frac{1}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \beta(u_i, v_i)}\right)^{\sigma(u_i, v_i)}} (y_i - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i)-1} e^{\left(-\frac{(y_i - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i)}}{e^{\mathbf{x}_i^T \beta(u_i, v_i)}}\right)}$$

c. Menetapkan logaritma natural (\ln) dari fungsi *likelihood*

$$Q = \ln L(\beta(u_i, v_i), \sigma(u_i, v_i), \delta(u_i, v_i) | y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$= \ln \left[\prod_{i=1}^n \sigma(u_i, v_i) \frac{1}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \beta(u_i, v_i)}\right)^{\sigma(u_i, v_i)}} (y_i - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i)-1} e^{\left(-\frac{(y_i - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i)}}{e^{\mathbf{x}_i^T \beta(u_i, v_i)}}\right)} \right]$$

d. Memberi pembobot (w_{ij}) pada fungsi *logaritma natural likelihood*

$$Q^* = Q(w_{ij})$$

e. Mencari turunan parsial pertama fungsi *logaritma natural likelihood*

f. Mencari turunan parsial kedua fungsi *logaritma natural likelihood*

g. Menentukan penaksir parameter dengan metode iterasi *Newton-Raphson* jika fungsi yang dihasilkan tidak *closed form* (masih mengandung parameter dalam fungsi), langkah-langkah :

Menentukan nilai taksiran awal parameter

$$\hat{\gamma}(u_i, v_i)_{(0)} = \left[\hat{\beta}^T(u_i, v_i)_{(0)} \quad \hat{\sigma}(u_i, v_i)_{(0)} \quad \hat{\delta}(u_i, v_i)_{(0)} \right]^T. \text{ Untuk taksiran awal}$$

parameter $\hat{\beta}(u_i, v_i)_{(0)}$, $\hat{\sigma}(u_i, v_i)_{(0)}$ dan $\hat{\delta}(u_i, v_i)_{(0)}$ menggunakan nilai dari

estimasi parameter regresi weibul. Setelah itu membentuk vektor gradien(\mathbf{g}) dan matriks Hessian(\mathbf{H})

$$\mathbf{g}\left(\hat{\gamma}(u_i, v_i)_{(m)}\right) = \left[\frac{\partial Q^*}{\partial \beta(u_i, v_i)}, \frac{\partial Q^*}{\partial \sigma(u_i, v_i)}, \frac{\partial Q^*}{\partial \delta(u_i, v_i)} \right]^T$$

$$\mathbf{H}\left(\hat{\gamma}(u_i, v_i)_{(m)}\right)_{(k+3) \times (k+3)}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q^*}{\partial \beta^T(u_i, v_i) \partial \beta(u_i, v_i)} & \frac{\partial^2 Q^*}{\partial \beta^T(u_i, v_i) \partial \sigma(u_i, v_i)} & \frac{\partial^2 Q^*}{\partial \beta^T(u_i, v_i) \partial \delta(u_i, v_i)} \\ \frac{\partial^2 Q^*}{\partial \sigma^2(u_i, v_i)} & & \\ \text{simetris} & & \frac{\partial^2 Q^*}{\partial \delta^2(u_i, v_i)} \end{bmatrix}$$

Mensubstitusikan nilai $\hat{\gamma}(u_i, v_i)_{(0)}$ ke dalam elemen-elemen vektor $\mathbf{g}\left(\hat{\gamma}(u_i, v_i)_{(0)}\right)$ dan matriks $\mathbf{H}\left(\hat{\gamma}(u_i, v_i)_{(0)}\right)$. Lalu dimulai dari $m = 0$ dilakukan iterasi pada persamaan berikut

$$\hat{\gamma}(u_i, v_i)_{(m+1)} = \hat{\gamma}(u_i, v_i)_{(m)} - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\gamma}(u_i, v_i)_{(m)}\right) \mathbf{g}\left(\hat{\gamma}(u_i, v_i)_{(m)}\right)$$

Jika belum mendapatkan penaksir parameter yang konvergen, maka dilanjutkan kembali hingga iterasi ke $m = m + 1$. Iterasi akan berhenti apabila nilai dari $\left\| \hat{\gamma}(u_i, v_i)_{(m+1)} - \hat{\gamma}(u_i, v_i)_{(m)} \right\| \leq \varepsilon$, dan ε adalah bilangan yang sangat kecil seperti 0,0001.

h. Membuat algoritma untuk penaksiran parameter.

2. Menentukan statistik uji pada model *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR) dengan metode MLRT

a. Uji kesamaan antara model GWUWR dan regresi univariat weibull

Hipotesis :

$$H_0 : \beta_j(u_i, v_i) = \beta_j \quad ; i = 1, 2, \dots, 30 \quad ; j = 1, 2, \dots, k$$

$$H_1 : \text{Minimal ada satu } \beta_j(u_i, v_i) \neq \beta_j$$

b. Pengujian secara serentak, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1) Hipotesis :

$$H_0 : \beta_1(u_i, v_i) = \beta_2(u_i, v_i) = \dots = \beta_k(u_i, v_i) = 0$$

$$H_1 : \text{Minimal ada satu } \beta_j(u_i, v_i) \neq 0 \quad ; i = 1, 2, \dots, 30 \quad ; j = 1, 2, \dots, k$$

2) Menentukan himpunan parameter di bawah populasi

3) Membuat fungsi *ln likelihood* dibawah populasi $\ln(L(\Omega))$

4) Menentukan himpunan parameter di bawah H_0

5) Membuat fungsi *ln likelihood* dibawah $H_0 \ln(L(\omega))$

6) Menentukan penaksir paramater dengan metode MLE dan *Newton-Raphson* untuk mendapatkan nilai penaksir parameter, sehingga diperoleh $(\hat{\Omega})$ dan $(\hat{\omega})$

7) Menentukan $\ln L(\hat{\Omega}) = \max_{\Omega} \ln L(\Omega)$ dan $\ln L(\hat{\omega}) = \max_{\omega} \ln L(\omega)$

8) Menentukan statistik uji dengan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) dan menentukan daerah penolakan H_0 .

9) Membuat algoritma untuk pengujian hipotesis.

c. Pengujian secara parsial, dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1) Hipotesis untuk menguji signifikansi parameter $\beta(u_i, v_i)$

$$H_0 : \beta_j(u_i, v_i) = 0$$

$$H_1 : \beta_j(u_i, v_i) \neq 0$$

2) Menentukan statistik uji

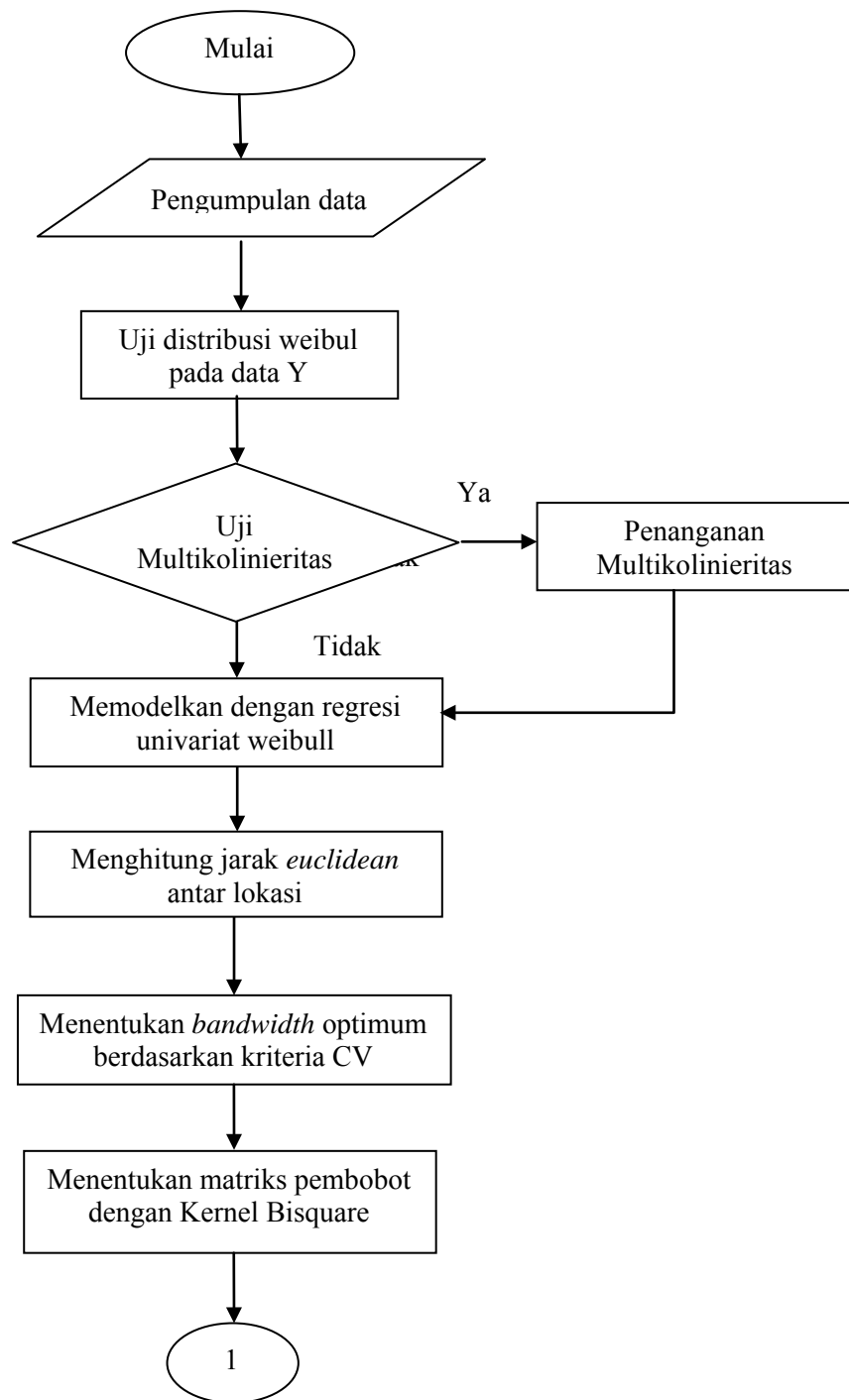
3) Menentukan daerah penolakan H_0

3. Menentukan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap *Chemical Oxygen Demand* (COD) sungai Surabaya berdasarkan model *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR)

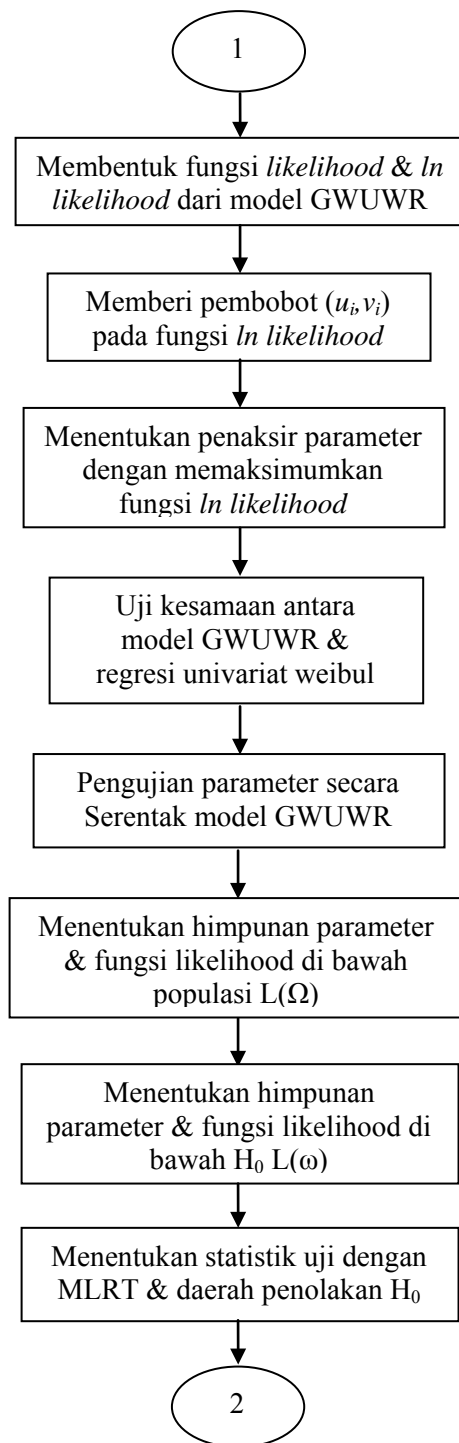
a. Melakukan pengujian kesesuaian distribusi weibull terhadap data pada Y (COD) dengan menggunakan statistik uji Anderson-Darling.

b. Melakukan kriteria VIF untuk melihat adanya kasus multikolinieritas antar variabel prediktor.

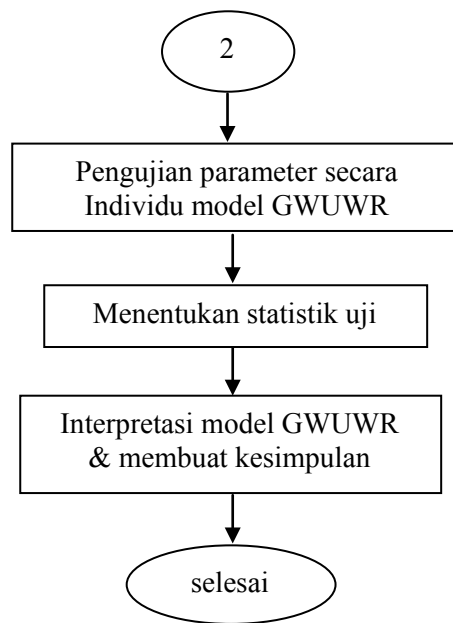
- c. Memodelkan *Chemical Oxygen Demand* (COD) dengan regresi univariat weibull.
- d. Menentukan nilai *bandwidth* optimum berdasarkan kriteria *Cross Validation* (CV). Perhitungan CV dilakukan hingga mendapatkan nilai CV minimum.
- e. Menentukan matriks pembobot dengan menggunakan fungsi kernel Bisquare.
- f. Menaksir parameter model *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression*.
- g. Melakukan pengujian hipotesis
- h. Menginterpretasi dan menyimpulkan hasil pemodelan dengan GWUWR



Gambar 3.2 Flow Chart



Gambar 3.2 *Flow Chart* (lanjutan)



Gambar 3.2 *Flow Chart* (lanjutan)

halaman ini sengaja dikosongkan

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

Analisis dan pembahasan merupakan penyelesaian dari permasalahan yang ada. Pada permulaan bab ini akan membahas tentang penaksiran parameter model *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR), mendapatkan statistik uji model GWUWR dan dilanjutkan dengan penerapan GWUWR pada masalah pencemaran kualitas air sungai yaitu mencari faktor-faktor apa saja yang berpengaruh terhadap indikator pencemaran sungai Surabaya berdasarkan model *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR).

4.1 Penaksiran Parameter Model *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR)

Dalam menaksir parameter model *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR) menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) yaitu dengan memaksimumkan fungsi likelihood (Casella & Berger, 2002). Model yang terbentuk yaitu pada persamaan (4.1)

$$\begin{aligned}\theta_i(u_i, v_i) &= \exp(\beta_0(u_i, v_i) + \beta_1(u_i, v_i)x_{1i} + \beta_2(u_i, v_i)x_{2i} + \dots + \beta_k(u_i, v_i)x_{ki}) \\ &= \exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)) = e^{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}\end{aligned}\quad (4.1)$$

Fungsi kepadatan probabilitas dari y_i untuk model GWUWR (4.3) didapatkan dengan mentransformasi persamaan (4.1) ke dalam persamaan (4.2)

$$\begin{aligned}f(y_i | \theta(u_i, v_i), \sigma(u_i, v_i), \delta(u_i, v_i)) \\ = \frac{\sigma(u_i, v_i)}{(\theta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i)}} (y_i - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i)-1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta(u_i, v_i)}{\theta(u_i, v_i)}\right)^{\sigma(u_i, v_i)}\right)}\end{aligned}\quad (4.2)$$

Berikut merupakan fungsi kepadatan probabilitas yaitu pada persamaan (4.3)

$$\begin{aligned}
& f(y_i | \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i), \sigma(u_i, v_i), \delta(u_i, v_i)) \\
&= \frac{\sigma(u_i, v_i)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}\right)^{\sigma(u_i, v_i)}} (y_i - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i)-1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}}\right)^{\sigma(u_i, v_i)}\right)}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Fungsi likelihood dari model GWUWR yaitu seperti pada persamaan (4.4)

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i), \sigma(u_i, v_i), \delta(u_i, v_i) | y_1, y_2, \dots, y_n) &= \prod_{i=1}^n f(y_i) \\
&= \prod_{i=1}^n \frac{\sigma(u_i, v_i)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}\right)^{\sigma(u_i, v_i)}} (y_i - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i)-1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}}\right)^{\sigma(u_i, v_i)}\right)} \\
&= \prod_{i=1}^n \sigma(u_i, v_i) \frac{1}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}\right)^{\sigma(u_i, v_i)}} (y_i - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i)-1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}}\right)^{\sigma(u_i, v_i)}\right)}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Setelah itu dilakukan transformasi \ln pada fungsi likelihood (4.4) sehingga mendapatkan persamaan (4.5)

$$\begin{aligned}
Q &= \ln L(\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i), \sigma(u_i, v_i), \delta(u_i, v_i) | y_1, y_2, \dots, y_n) \\
&= \ln \left(\prod_{i=1}^n \sigma(u_i, v_i) \frac{1}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}\right)^{\sigma(u_i, v_i)}} (y_i - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i)-1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}}\right)^{\sigma(u_i, v_i)}\right)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \ln \left(\sigma(u_i, v_i) \frac{1}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}\right)^{\sigma(u_i, v_i)}} (y_i - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i)-1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}}\right)^{\sigma(u_i, v_i)}\right)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \ln \sigma(u_i, v_i) - \sum_{i=1}^n \sigma(u_i, v_i) \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n (\sigma(u_i, v_i) - 1) \ln(y_i - \delta(u_i, v_i)) - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} \right)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Selanjutnya yaitu memberi pembobot pada fungsi *logaritma natural likelihood* (4.5) sehingga didapatkan persamaan (4.6). Pembobot (w_{ij}) merupakan faktor geografis dari setiap titik pengamatan (lokasi) dan setiap titik pengamatan

memiliki faktor geografis yang berbeda. Jadi, setiap daerah menunjukkan sifat lokal pada model GWUWR.

$$\begin{aligned}
Q^* &= \left(\begin{aligned} &\sum_{j=1}^n \ln \sigma(u_i, v_i) - \sum_{j=1}^n \sigma(u_i, v_i) \mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) \\ &+ \sum_{j=1}^n (\sigma(u_i, v_i) - 1) \ln(y_j - \delta(u_i, v_i)) \\ &- \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} \end{aligned} \right) (w_{ij}) \\
&= \sum_{j=1}^n \ln \sigma(u_i, v_i) (w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \sigma(u_i, v_i) \mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) (w_{ij}) \\
&+ \sum_{j=1}^n (\sigma(u_i, v_i) - 1) \ln(y_j - \delta(u_i, v_i)) (w_{ij}) \\
&- \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} (w_{ij}) \tag{4.6}
\end{aligned}$$

Parameter *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR) dapat diperoleh dengan mencari turunan parsial pertama fungsi *ln likelihood* (4.6) terhadap parameter $\boldsymbol{\beta}^T(u_i, v_i)$, $\sigma(u_i, v_i)$ dan $\delta(u_i, v_i)$. Turunan pertama fungsi *ln likelihood* (4.6) terhadap parameter $\boldsymbol{\beta}^T(u_i, v_i)$ yaitu :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial Q^*}{\partial \boldsymbol{\beta}^T(u_i, v_i)} \\
&= \frac{\partial \left(\begin{aligned} &\sum_{j=1}^n \ln \sigma(u_i, v_i) (w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \sigma(u_i, v_i) \mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) (w_{ij}) \\ &+ \sum_{j=1}^n (\sigma(u_i, v_i) - 1) \ln(y_j - \delta(u_i, v_i)) (w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} (w_{ij}) \end{aligned} \right)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T(u_i, v_i)} \\
&= - \sum_{j=1}^n \sigma(u_i, v_i) \mathbf{x}_j (w_{ij}) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} \mathbf{x}_j \sigma(u_i, v_i) (w_{ij}) \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Turunan pertama fungsi *ln likelihood* (4.6) terhadap parameter $\sigma(u_i, v_i)$ yaitu :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial Q^*}{\partial \sigma(u_i, v_i)} \\
&= \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^n \ln \sigma(u_i, v_i) (w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \sigma(u_i, v_i) \mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) (w_{ij}) \right.}{\partial \sigma(u_i, v_i)} \\
& \quad \left. + \sum_{j=1}^n (\sigma(u_i, v_i) - 1) \ln(y_j - \delta(u_i, v_i)) (w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} (w_{ij}) \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma(u_i, v_i)} (w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) (w_{ij}) + \sum_{j=1}^n \ln(y_j - \delta(u_i, v_i)) (w_{ij}) \\
& \quad - \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{y_j - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} \ln \left(\frac{y_j - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right) \right) (w_{ij}) \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Turunan pertama fungsi *ln likelihood* (4.6) terhadap parameter $\delta(u_i, v_i)$

yaitu :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial Q^*}{\partial \delta(u_i, v_i)} \\
&= \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^n \ln \sigma(u_i, v_i) (w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \sigma(u_i, v_i) \mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) (w_{ij}) \right.}{\partial \delta(u_i, v_i)} \\
& \quad \left. + \sum_{j=1}^n (\sigma(u_i, v_i) - 1) \ln(y_j - \delta(u_i, v_i)) (w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} (w_{ij}) \right) \\
&= - \sum_{j=1}^n (\sigma(u_i, v_i) - 1) \left(\frac{1}{y_j - \delta(u_i, v_i)} \right) (w_{ij}) \\
& \quad + \sum_{j=1}^n \sigma(u_i, v_i) \left(\frac{(y_j - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i) - 1}}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) \sigma(u_i, v_i)}} \right) (w_{ij}) \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Setelah mendapatkan penurunan pertama untuk setiap parameter, lalu disamakan dengan nol dan dicari solusinya. Namun didapatkan hasil yang implisit dan tidak *closed form* untuk setiap parameternya dikarenakan masih terdapat parameter dalam persamaan yang terbentuk. Untuk mengatasi hal tersebut maka digunakan iterasi *Newton Raphson* (Cameron & Triverdi, 2005). Berikut langkah-langkah dalam metode iterasi *Newton Raphson* :

Menentukan nilai taksiran awal parameter antara lain

$$\hat{\gamma}(u_i, v_i)_{(0)} = \left[\hat{\beta}^T(u_i, v_i)_{(0)} \quad \hat{\sigma}(u_i, v_i)_{(0)} \quad \hat{\delta}(u_i, v_i)_{(0)} \right]^T \quad (4.10)$$

Untuk taksiran awal parameter $\hat{\beta}(u_i, v_i)_{(0)}$, $\hat{\sigma}(u_i, v_i)_{(0)}$ dan $\hat{\delta}(u_i, v_i)_{(0)}$ menggunakan nilai dari estimasi parameter regresi weibul. Setelah itu membentuk vektor gradien (\mathbf{g}) dan matriks Hessian (\mathbf{H}) seperti pada persamaan (4.11) dan (4.12)

$$\mathbf{g}(\hat{\gamma}(u_i, v_i)_{(m)}) = \left[\frac{\partial Q^*}{\partial \beta(u_i, v_i)}, \quad \frac{\partial Q^*}{\partial \sigma(u_i, v_i)}, \quad \frac{\partial Q^*}{\partial \delta(u_i, v_i)} \right]^T \quad (4.11)$$

$$\mathbf{H}(\hat{\gamma}(u_i, v_i)_{(m)})_{(k+3) \times (k+3)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q^*}{\partial \beta^T(u_i, v_i) \partial \beta(u_i, v_i)} & \frac{\partial^2 Q^*}{\partial \beta^T(u_i, v_i) \partial \sigma(u_i, v_i)} & \frac{\partial^2 Q^*}{\partial \beta^T(u_i, v_i) \partial \delta(u_i, v_i)} \\ \frac{\partial^2 Q^*}{\partial \sigma^2(u_i, v_i)} & & \\ \text{simetris} & & \frac{\partial^2 Q^*}{\partial \delta^2(u_i, v_i)} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Matriks Hessian merupakan turunan parsial kedua fungsi *ln likelihood* (Q^*) pada persamaan (4.6) terhadap masing-masing parameter. Berikut merupakan turunan kedua fungsi (Q^*) terhadap parameter $\beta(u_i, v_i)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q^*}{\partial \beta^T(u_i, v_i) \partial \beta(u_i, v_i)} &= \frac{\partial}{\partial \beta(u_i, v_i)} \left(\frac{\partial Q^*}{\partial \beta^T(u_i, v_i)} \right) \\ &= \frac{\partial \left(-\sum_{j=1}^n \sigma(u_i, v_i) \mathbf{x}_j(w_{ij}) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_j^T \beta(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} \mathbf{x}_j \sigma(u_i, v_i) (w_{ij}) \right)}{\partial \beta(u_i, v_i)} \\ &= 0 + \frac{\partial \sum_{j=1}^n (y_j - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i)} e^{-\mathbf{x}_j^T \beta(u_i, v_i) \sigma(u_i, v_i)} \mathbf{x}_j \sigma(u_i, v_i) (w_{ij})}{\partial \beta(u_i, v_i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \left(\left(y_j - \delta(u_i, v_i) \right)^{\sigma(u_i, v_i)} \mathbf{x}_j \sigma(u_i, v_i) \left(-\mathbf{x}_j^T \sigma(u_i, v_i) e^{-\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) \sigma(u_i, v_i)} \right) \right) (w_{ij}) \\
&= - \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{y_j - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T \sigma^2(u_i, v_i) \right) (w_{ij}) \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Turunan fungsi (Q^*) terhadap parameter $\boldsymbol{\beta}^T(u_i, v_i)$ dan $\sigma(u_i, v_i)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Q^*}{\partial \boldsymbol{\beta}^T(u_i, v_i) \partial \sigma(u_i, v_i)} &= \frac{\partial}{\partial \sigma(u_i, v_i)} \left(\frac{\partial Q^*}{\partial \boldsymbol{\beta}^T(u_i, v_i)} \right) \\
&= \frac{\partial \left(- \sum_{j=1}^n \sigma(u_i, v_i) \mathbf{x}_j (w_{ij}) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} \mathbf{x}_j \sigma(u_i, v_i) (w_{ij}) \right)}{\partial \sigma(u_i, v_i)} \\
&= - \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j (w_{ij}) + \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} \mathbf{x}_j \sigma(u_i, v_i) (w_{ij}) \right)}{\partial \sigma(u_i, v_i)} \\
&= - \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j (w_{ij}) \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{y_j - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} \ln \left(\frac{y_j - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right) \mathbf{x}_j \sigma(u_i, v_i) + \left(\frac{y_j - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} \mathbf{x}_j \right) (w_{ij}) \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Turunan fungsi (Q^*) terhadap parameter $\boldsymbol{\beta}^T(u_i, v_i)$ dan $\delta(u_i, v_i)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Q^*}{\partial \boldsymbol{\beta}^T(u_i, v_i) \partial \delta(u_i, v_i)} &= \frac{\partial}{\partial \delta(u_i, v_i)} \left(\frac{\partial Q^*}{\partial \boldsymbol{\beta}^T(u_i, v_i)} \right) \\
&= \frac{\partial \left(- \sum_{j=1}^n \sigma(u_i, v_i) \mathbf{x}_j (w_{ij}) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} \mathbf{x}_j \sigma(u_i, v_i) (w_{ij}) \right)}{\partial \delta(u_i, v_i)} \\
&= 0 + \sum_{j=1}^n \left(\mathbf{x}_j \sigma(u_i, v_i) e^{-\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) \sigma(u_i, v_i)} \sigma(u_i, v_i) (y_j - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i)-1} (-1) \right) (w_{ij}) \\
&= - \sum_{j=1}^n \left(\mathbf{x}_j \sigma(u_i, v_i) e^{-\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) \sigma(u_i, v_i)} \sigma(u_i, v_i) (y_j - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i)-1} \right) (w_{ij}) \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Berikut merupakan turunan kedua fungsi (Q^*) terhadap parameter

$$\sigma(u_i, v_i)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Q^*}{\partial \sigma^2(u_i, v_i)} &= \frac{\partial}{\partial \sigma(u_i, v_i)} \left(\frac{\partial Q^*}{\partial \sigma(u_i, v_i)} \right) \\
&= \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma(u_i, v_i)} (w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) (w_{ij}) + \sum_{j=1}^n \ln(y_j - \delta(u_i, v_i)) (w_{ij}) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{(y_j - \delta(u_i, v_i))}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} \ln \left(\frac{(y_j - \delta(u_i, v_i))}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right) \right) (w_{ij}) \right)}{\partial \sigma(u_i, v_i)} \\
&= - \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma^2(u_i, v_i)} (w_{ij}) - 0 + 0 \\
&\quad - \sum_{j=1}^n \left(\ln \left(\frac{(y_j - \delta(u_i, v_i))}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right) \right) \left(\frac{(y_j - \delta(u_i, v_i))}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} \ln \left(\frac{(y_j - \delta(u_i, v_i))}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right) (w_{ij}) \\
&= - \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma^2(u_i, v_i)} (w_{ij}) \\
&\quad - \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{(y_j - \delta(u_i, v_i))}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} \left[\ln \frac{(y_j - \delta(u_i, v_i))}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right]^2 \right) (w_{ij}) \\
&= - \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma^2(u_i, v_i)} (w_{ij}) \\
&\quad - \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{(y_j - \delta(u_i, v_i))}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} \ln^2 \left(\frac{(y_j - \delta(u_i, v_i))}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right) \right) (w_{ij}) \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Berikut merupakan turunan kedua fungsi (Q^*) terhadap parameter

$$\sigma(u_i, v_i) \text{ dan } \delta(u_i, v_i)$$

$$\frac{\partial^2 Q^*}{\partial \sigma(u_i, v_i) \partial \delta(u_i, v_i)} = \frac{\partial}{\partial \delta(u_i, v_i)} \left(\frac{\partial Q^*}{\partial \sigma(u_i, v_i)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma(u_i, v_i)} (w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) (w_{ij}) + \sum_{j=1}^n \ln(y_j - \delta(u_i, v_i)) (w_{ij}) \right.}{\partial \delta(u_i, v_i)} \\
&\quad \left. - \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{(y_j - \delta(u_i, v_i))}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} \ln \left(\frac{(y_j - \delta(u_i, v_i))}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right) \right) (w_{ij}) \right) \\
&= 0 - 0 + \sum_{j=1}^n \frac{-1}{(y_j - \delta(u_i, v_i))} (w_{ij}) \\
&\quad - \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{(y_j - \delta(u_i, v_i))}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} \ln \left(\frac{(y_j - \delta(u_i, v_i))}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right) \right) (w_{ij}) \right)}{\partial \delta(u_i, v_i)} \\
&= 0 - 0 + \sum_{j=1}^n \frac{-1}{(y_j - \delta(u_i, v_i))} (w_{ij}) \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\sigma(u_i, v_i)}{(y_j - \delta(u_i, v_i))} \left(\frac{(y_j - \delta(u_i, v_i))}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} \ln \left(\frac{(y_j - \delta(u_i, v_i))}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right) \right) (w_{ij}) \quad (4.17) \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{(y_j - \delta(u_i, v_i))}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} \left(\frac{1}{(y_j - \delta(u_i, v_i))} \right) \left(\frac{1}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right) \right) (w_{ij})
\end{aligned}$$

Berikut merupakan turunan kedua fungsi (Q^*) terhadap parameter

$\delta(u_i, v_i)$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 Q^*}{\partial \delta^2(u_i, v_i)} = \frac{\partial}{\partial \delta(u_i, v_i)} \left(\frac{\partial Q^*}{\partial \delta(u_i, v_i)} \right) \\
&= \frac{\partial \left(- \sum_{j=1}^n (\sigma(u_i, v_i) - 1) \left(\frac{1}{y_j - \delta(u_i, v_i)} \right) (w_{ij}) \right.}{\partial \delta(u_i, v_i)} \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^n \sigma(u_i, v_i) \left(\frac{(y_j - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i) - 1}}{e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) \sigma(u_i, v_i)}} \right) (w_{ij}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial \left(\begin{aligned} &-\sum_{j=1}^n (\sigma(u_i, v_i) - 1) (y_j - \delta(u_i, v_i))^{-1} (w_{ij}) \\ &+ \sum_{j=1}^n \sigma(u_i, v_i) \left((y_j - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i) - 1} \right) \left(e^{\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) \sigma(u_i, v_i)} \right)^{-1} (w_{ij}) \end{aligned} \right)}{\partial \delta(u_i, v_i)} \\
&= \sum_{j=1}^n (\sigma(u_i, v_i) - 1) (y_j - \delta(u_i, v_i))^{-2} (-1) (w_{ij}) \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \sigma(u_i, v_i) (\sigma(u_i, v_i) - 1) \left((y_j - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i) - 2} \right) (-1) \left(e^{-\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} (w_{ij}) \\
&= - \sum_{j=1}^n (\sigma(u_i, v_i) - 1) (y_j - \delta(u_i, v_i))^{-2} (w_{ij}) \\
&\quad - \sum_{j=1}^n \sigma(u_i, v_i) (\sigma(u_i, v_i) - 1) \left((y_j - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i) - 2} \right) \left(e^{-\mathbf{x}_j^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} (w_{ij}) \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Mensubstitusikan nilai $\hat{\boldsymbol{\gamma}}(u_i, v_i)_{(0)}$ ke dalam elemen-elemen vektor $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}(u_i, v_i)_{(0)})$ dan matriks $\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}(u_i, v_i)_{(0)})$. Lalu dimulai dari $m=0$ dilakukan iterasi pada persamaan (4.19)

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}(u_i, v_i)_{(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}(u_i, v_i)_{(m)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}(u_i, v_i)_{(m)}) \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}(u_i, v_i)_{(m)}) \tag{4.19}$$

Jika belum mendapatkan penaksir parameter yang konvergen, maka dilanjutkan kembali hingga iterasi ke $m = m + 1$. Iterasi akan berhenti apabila nilai dari

$$\left\| \hat{\boldsymbol{\gamma}}(u_i, v_i)_{(m+1)} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}(u_i, v_i)_{(m)} \right\| \leq \varepsilon \tag{4.20}$$

dimana ε adalah bilangan yang sangat kecil seperti 0,0001.

Proses iterasi *Newton Raphson* akan dilakukan untuk setiap lokasi ke- i , sehingga akan mendapatkan nilai $\hat{\boldsymbol{\gamma}}(u_i, v_i)$ yang bersifat lokal untuk setiap wilayah.

4.2 Pengujian Parameter Model *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR)

Dalam Pengujian parameter model *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR) menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT). Pengujian parameter dilakukan melalui uji hipotesis yang dibedakan menjadi uji serentak pada parameter $\beta(u_i, v_i)$ dan uji parsial pada setiap parameter $\beta(u_i, v_i)$ model GWUWR. Namun sebelumnya akan dilakukan pengujian kesamaan antara model GWUWR dan regresi univariat weibul. Berikut merupakan penjelasan dari masing-masing pengujian.

4.2.1 Pengujian Kesamaan Model GWUWR

Pengujian kesamaan model GWUWR dilakukan untuk menguji signifikansi faktor geografis yang memberikan pengaruh pada variabel lokal, yaitu membandingkan kesamaan antara model GWUWR dengan model regresi univariat weibul.

Hipotesis :

$$H_0 : \beta_j(u_i, v_i) = \beta_j \quad ; i = 1, 2, \dots, n \quad ; j = 1, 2, \dots, k$$

$$H_1 : \text{Minimal ada satu } \beta_j(u_i, v_i) \neq \beta_j$$

Statistik uji :

$$F_{hit} = \frac{G_1^2 / df_1}{G_2^2 / df_2} \quad (4.21)$$

Statistik uji yang digunakan merupakan ukuran perbandingan nilai *likelihood ratio* dari model regresi univariat weibul dengan model GWUWR. G_1^2 merupakan nilai devians (*likelihood ratio test*) dari model regresi univariat weibul dengan derajat bebas df_1 , sedangkan G_2^2 merupakan nilai devians dari model GWUWR dengan derajat bebas df_2 . G_1^2 merupakan pendekatan dari distribusi χ^2 dengan derajat bebas $df_1 = (a - b)$, dimana a adalah jumlah paramater dibawah populasi dan b adalah jumlah parameter dibawah H_0 .

Keputusan :

Tolak H_0 jika $F_{hit} > F_{(\alpha, df1, df2)}$ artinya bahwa ada perbedaan yang signifikan antara model GWUWR dengan model regresi univariat weibul. Apabila disimpulkan bahwa antara kedua model tidak sama, maka perlu dilakukan pengujian serentak parameter GWUWR. Adapun *likelihood ratio test* dari model regresi univariat weibul (G_1^2) dan GWUWR (G_2^2) dijelaskan sebagai berikut.

Likelihood ratio test dari model regresi univariat weibul G_1^2 didapatkan dengan memaksimumkan fungsi *ln likelihood* dari himpunan parameter di bawah populasi (H_1) dan di bawah H_0 . Berikut merupakan langkah-langkah mendapatkan G_1^2 .

Menentukan himpunan parameter di bawah populasi $\Omega = (\beta, \sigma, \delta)$ dan himpunan parameter di bawah H_0 yaitu $\omega = (\beta_0, \sigma_\omega, \delta_\omega)$. Selanjutnya membentuk fungsi *ln likelihood* dari $L(\Omega)$ dan $L(\omega)$ seperti pada persamaan (4.23) dan (4.25)

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^n \frac{\sigma}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \beta}\right)^\sigma} (y_i - \delta)^{\sigma-1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \beta}}\right)^\sigma\right)} \quad (4.22)$$

$$\ln L(\Omega) = n \ln \sigma - \sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \beta + (\sigma - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta) + \left(-\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \beta}}\right)^\sigma\right) \quad (4.23)$$

dan

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^n \frac{\sigma_\omega}{\left(e^{\beta_0}\right)^{\sigma_\omega}} (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega-1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta_\omega}{e^{\beta_0}}\right)^{\sigma_\omega}\right)} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned}
\ln L(\omega) &= \ln \left(\prod_{i=1}^n \frac{\sigma_\omega}{(e^{\beta_0})^{\sigma_\omega}} (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega - 1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta_\omega}{e^{\beta_0}} \right)^{\sigma_\omega} \right)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{\sigma_\omega}{(e^{\beta_0})^{\sigma_\omega}} (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega - 1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta_\omega}{e^{\beta_0}} \right)^{\sigma_\omega} \right)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \ln \sigma_\omega - \sum_{i=1}^n \ln (e^{\beta_0})^{\sigma_\omega} + \sum_{i=1}^n \ln (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega - 1} + \sum_{i=1}^n \ln e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta_\omega}{e^{\beta_0}} \right)^{\sigma_\omega} \right)} \\
&= \sum_{i=1}^n \ln \sigma_\omega - \sum_{i=1}^n \beta_0 \sigma_\omega + (\sigma_\omega - 1) \sum_{i=1}^n \ln (y_i - \delta_\omega) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta_\omega}{e^{\beta_0}} \right)^{\sigma_\omega} \\
&= n \ln \sigma_\omega - n \beta_0 \sigma_\omega + (\sigma_\omega - 1) \sum_{i=1}^n \ln (y_i - \delta_\omega) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta_\omega}{e^{\beta_0}} \right)^{\sigma_\omega} \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Langkah selanjutnya yaitu memaksimumkan fungsi *ln likelihood* pada persamaan (4.23) dan (4.25). Memaksimumkan fungsi $\ln L(\Omega)$ dilakukan dengan cara mencari turunan pertama fungsi $\ln L(\Omega)$ terhadap parameter β^T, σ, δ seperti pada persamaan (4.26), (4.27) dan (4.28).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \beta^T} &= \frac{\partial \left(n \ln \sigma - \sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \beta + (\sigma - 1) \sum_{i=1}^n \ln (y_i - \delta) - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \beta}} \right)^\sigma \right) \right)}{\partial \beta^T} \\
&= -\sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \beta}} \right)^\sigma \mathbf{x}_i \sigma \right) \tag{4.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \sigma} &= \frac{\partial \left(n \ln \sigma - \sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \beta + (\sigma - 1) \sum_{i=1}^n \ln (y_i - \delta) - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \beta}} \right)^\sigma \right) \right)}{\partial \sigma} \\
&= \frac{n}{\sigma} - \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \beta + \sum_{i=1}^n \ln (y_i - \delta) - \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \beta}} \right)^\sigma \ln \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \beta}} \right) \right) \tag{4.27}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \delta} = \frac{\partial \left(n \ln \sigma - \sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \beta + (\sigma - 1) \sum_{i=1}^n \ln (y_i - \delta) - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \beta}} \right)^\sigma \right) \right)}{\partial \delta}$$

$$= -(\sigma - 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i - \delta} \right) + \sigma \sum_{i=1}^n \left(\frac{(y_i - \delta)^{\sigma-1}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \sigma}} \right) \quad (4.28)$$

Setelah mendapatkan penurunan pertama untuk parameter $\boldsymbol{\beta}^T, \sigma, \delta$ lalu disamakan dengan nol pada persamaan (4.29), (4.30) dan (4.31)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} &= 0 \\ -\sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \mathbf{x}_i \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \sigma} &= 0 \\ \frac{n}{\sigma} - \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta) - \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{(y_i - \delta)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \ln \left(\frac{(y_i - \delta)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \delta} &= 0 \\ -(\sigma - 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i - \delta} \right) + \sigma \sum_{i=1}^n \left(\frac{(y_i - \delta)^{\sigma-1}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \sigma}} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Berdasarkan persamaan (4.29), (4.30) dan (4.31) lalu dicari solusinya namun didapatkan hasil yang implisit dan tidak *closed form* sehingga digunakan iterasi *Newton Raphson*. Langkah-langkah dalam iterasi *Newton Raphson* sesuai dengan persamaan (2.10), (2.11), (2.12) dan (2.13).

Dengan cara yang sama, memaksimumkan fungsi $\ln L(\omega)$ (4.25) dilakukan dengan cara mencari turunan pertama fungsi $\ln L(\omega)$ terhadap parameter $\beta_0, \sigma_\omega, \delta_\omega$ seperti pada persamaan (4.32), (4.33) dan (4.34).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \beta_0} &= \frac{\partial \left(n \ln \sigma_\omega - n \beta_0 \sigma_\omega + (\sigma_\omega - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta_\omega) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta_\omega}{e^{\beta_0}} \right)^{\sigma_\omega} \right)}{\partial \beta_0} \\ &= -n \sigma_\omega + e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sigma_\omega \sum_{i=1}^n \left((y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \sigma_\omega} &= \frac{\partial \left(n \ln \sigma_\omega - n \beta_0 \sigma_\omega + (\sigma_\omega - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta_\omega) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta_\omega}{e^{\beta_0}} \right)^{\sigma_\omega} \right)}{\partial \sigma_\omega} \\
&= \frac{n}{\sigma_\omega} - n \beta_0 + \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta_\omega) + e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \beta_0 \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \\
&\quad - e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \ln(y_i - \delta_\omega)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \delta_\omega} &= \frac{\partial \left(n \ln \sigma_\omega - n \beta_0 \sigma_\omega + (\sigma_\omega - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta_\omega) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta_\omega}{e^{\beta_0}} \right)^{\sigma_\omega} \right)}{\partial \delta_\omega} \\
&= -(\sigma_\omega - 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i - \delta_\omega} \right) + e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sigma_\omega \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega - 1}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Setelah mendapatkan penurunan pertama untuk parameter $\beta_0, \sigma_\omega, \delta_\omega$ lalu disamakan dengan nol yaitu pada persamaan (4.35), (4.36) dan (4.37)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \beta_0} &= 0 \\
-n\sigma + \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{y_i - \delta}{e^{\beta_0}} \right)^\sigma \sigma \right) &= 0
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \sigma_\omega} &= 0 \\
\frac{n}{\sigma_\omega} - n\beta_0 + \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta_\omega) - \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{y_i - \delta_\omega}{e^{\beta_0}} \right)^{\sigma_\omega} \ln \left(\frac{y_i - \delta_\omega}{e^{\beta_0}} \right) \right) &= 0
\end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \delta_\omega} &= 0 \\
-(\sigma_\omega - 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i - \delta_\omega} \right) + \sigma_\omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{(y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega - 1}}{e^{\beta_0 \sigma_\omega}} \right) &= 0
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Berdasarkan persamaan (4.35), (4.36) dan (4.37) lalu dicari solusinya namun didapatkan hasil yang implisit dan tidak *closed form* sehingga digunakan iterasi *Newton Raphson*. Berikut langkah-langkah dalam iterasi *Newton Raphson* :

1. Menentukan nilai taksiran awal parameter

$$\hat{\lambda}_{(0)} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{0(0)}^T & \hat{\sigma}_{\omega(0)} & \hat{\delta}_{\omega(0)} \end{bmatrix}^T \quad (4.38)$$

2. Membentuk vektor gradien \mathbf{g} dengan k peubah parameter yang ditaksir.

$$\mathbf{g}(\hat{\lambda}_{(m)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \beta_0}, & \frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \sigma_\omega}, & \frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \delta_\omega} \end{bmatrix}^T \quad (4.39)$$

3. Membuat matriks Hessian (\mathbf{H})

$$\mathbf{H}(\hat{\lambda}_{(m)})_{(k+1) \times (k+1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \beta_0^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \beta_0 \partial \sigma_\omega} & \frac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \beta_0 \partial \delta_\omega} \\ & \frac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \sigma_\omega^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \sigma_\omega \partial \delta_\omega} \\ \text{simetris} & & \frac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \delta_\omega^2} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Matriks Hessian diperoleh dari turunan parsial kedua fungsi $\ln L(\omega)$ (4.25) terhadap masing-masing parameter.

4. Mensubstitusikan nilai $\hat{\lambda}_{(0)}$ ke dalam elemen-elemen vektor $\mathbf{g}(\hat{\lambda}_{(0)})$ dan matriks $\mathbf{H}(\hat{\lambda}_{(0)})$. Matriks Hessian dapat dilihat pada Lampiran 5.

5. Mulai dari $m = 0$ dilakukan iterasi pada persamaan

$$\hat{\lambda}_{(m+1)} = \hat{\lambda}_{(m)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\lambda}_{(m)}) \mathbf{g}(\hat{\lambda}_{(m)}) \quad (4.41)$$

Nilai $\hat{\lambda}_{(m)}$ merupakan sekumpulan penaksir parameter yang konvergen saat iterasi ke- m

6. Jika belum mendapatkan penaksir parameter yang konvergen, maka dilanjutkan kembali ke langkah 5 hingga iterasi ke $m = m + 1$. Iterasi akan berhenti apabila nilai dari $\|\hat{\lambda}_{(m+1)} - \hat{\lambda}_{(m)}\| \leq \varepsilon$, dan ε adalah bilangan yang sangat kecil.

Perbandingan dari fungsi $\ln L(\omega)$ dan $\ln L(\hat{\Omega})$ yang telah dimaksimumkan yaitu $\ln L(\hat{\omega})$ dan $\ln L(\hat{\Omega})$ dinyatakan dalam statistik uji G_1^2 :

$$\begin{aligned}
G_1^2 &= -2 \ln \Lambda = -2 \ln \left(\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \right) = -2 \left(\ln L(\hat{\omega}) - \ln L(\hat{\Omega}) \right) \\
G_1^2 &= -2 \left(\begin{aligned} &n \ln \hat{\sigma}_\omega - n \hat{\beta}_0 \hat{\sigma}_\omega + (\hat{\sigma}_\omega - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \hat{\delta}_\omega) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \hat{\delta}_\omega}{e^{\hat{\beta}_0}} \right)^{\hat{\sigma}_\omega} \\ &- n \ln \hat{\sigma} + \hat{\sigma} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}} - (\hat{\sigma} - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \hat{\delta}) + \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \hat{\delta}}{e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}}} \right)^{\hat{\sigma}} \right) \end{aligned} \right) \\
G_1^2 &= \left(\begin{aligned} &-2n \ln \hat{\sigma}_\omega + 2n \hat{\beta}_0 \hat{\sigma}_\omega - 2(\hat{\sigma}_\omega - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \hat{\delta}_\omega) + 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \hat{\delta}_\omega}{e^{\hat{\beta}_0}} \right)^{\hat{\sigma}_\omega} \\ &+ 2n \ln \hat{\sigma} - 2\hat{\sigma} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}} + 2(\hat{\sigma} - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \hat{\delta}) - 2 \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \hat{\delta}}{e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}}} \right)^{\hat{\sigma}} \right) \end{aligned} \right) \quad (4.42)
\end{aligned}$$

Sedangkan *likelihood ratio test* dari model *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR) yaitu G_2^2 juga didapatkan dengan memaksimumkan fungsi *ln likelihood* dari himpunan parameter di bawah populasi (H_1) dan di bawah H_0 . Berikut merupakan langkah-langkah mendapatkan G_2^2 .

Menentukan himpunan parameter di bawah populasi $\Omega = (\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i), \sigma(u_i, v_i), \delta(u_i, v_i))$ dan membentuk fungsi *ln likelihood* dari $L(\Omega)$ seperti pada persamaan (4.44)

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^n \sigma(u_i, v_i) \frac{1}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)} \right)^{\sigma(u_i, v_i)}} (y_i - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i) - 1} e^{\left(- \left(\frac{y_i - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} \right)} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned}
\ln L(\Omega) &= \sum_{i=1}^n \ln \sigma(u_i, v_i) - \sum_{i=1}^n \sigma(u_i, v_i) \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) \\
&+ \sum_{i=1}^n \left((\sigma(u_i, v_i) - 1) \ln(y_i - \delta(u_i, v_i)) - \left(\frac{y_i - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} \right) \quad (4.44)
\end{aligned}$$

Selanjutnya fungsi $\ln L(\Omega)$ pada persamaan (4.44) dikalikan dengan pembobot (w_{ij}) sehingga didapatkan persamaan seperti (4.6), dilanjutkan dengan mencari turunan parsial pertama persamaan (4.6) terhadap setiap parameternya yaitu persamaan (4.7), (4.8) dan (4.9). Setiap turunan parsial disamakan dengan nol dan dicari solusi, namun hasil yang didapatkan tidak *closed form* sehingga digunakan iterasi *Newton Raphson*. Langkah-langkah iterasi *Newton Raphson* seperti dalam persamaan (4.10) hingga (4.20).

Menentukan himpunan parameter di bawah H_0 yaitu $\omega = (\beta_0(u_i, v_i), \sigma_\omega(u_i, v_i), \delta_\omega(u_i, v_i))$ dan membentuk fungsi *ln likelihood* dari $L(\omega)$ seperti pada persamaan (4.46)

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^n \frac{\sigma_\omega(u_i, v_i)}{(e^{\beta_0(u_i, v_i)})^{\sigma_\omega(u_i, v_i)}} (y_i - \delta_\omega(u_i, v_i))^{\sigma_\omega(u_i, v_i)-1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}}\right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)}\right)} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} R = \ln L(\omega) &= \ln \left[\prod_{i=1}^n \frac{\sigma_\omega(u_i, v_i)}{(e^{\beta_0(u_i, v_i)})^{\sigma_\omega(u_i, v_i)}} (y_i - \delta_\omega(u_i, v_i))^{\sigma_\omega(u_i, v_i)-1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}}\right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)}\right)} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \left[\frac{\sigma_\omega(u_i, v_i)}{(e^{\beta_0(u_i, v_i)})^{\sigma_\omega(u_i, v_i)}} (y_i - \delta_\omega(u_i, v_i))^{\sigma_\omega(u_i, v_i)-1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}}\right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)}\right)} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \sigma_\omega(u_i, v_i) - \sum_{i=1}^n \ln \left(e^{\beta_0(u_i, v_i)} \right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \ln (y_i - \delta_\omega(u_i, v_i))^{\sigma_\omega(u_i, v_i)-1} + \sum_{i=1}^n \ln e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}}\right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)}\right)} \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \sigma_\omega(u_i, v_i) - \sum_{i=1}^n \beta_0(u_i, v_i) \sigma_\omega(u_i, v_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (\sigma_\omega(u_i, v_i) - 1) \ln (y_i - \delta_\omega(u_i, v_i)) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Selanjutnya fungsi $R = \ln L(\omega)$ pada persamaan (4.46) dikalikan dengan pembobot (w_{ij}) sehingga didapatkan fungsi R^* (4.47).

$$\begin{aligned}
R^* &= \left(\sum_{j=1}^n \ln \sigma_{\omega}(u_i, v_i) - \sum_{j=1}^n \beta_0(u_i, v_i) \sigma_{\omega}(u_i, v_i) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^n (\sigma_{\omega}(u_i, v_i) - 1) \ln(y_j - \delta_{\omega}(u_i, v_i)) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j - \delta_{\omega}(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_{\omega}(u_i, v_i)} \right) (w_{ij}) \\
&= \sum_{j=1}^n \ln \sigma_{\omega}(u_i, v_i) (w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \beta_0(u_i, v_i) \sigma_{\omega}(u_i, v_i) (w_{ij}) \\
&\quad + \sum_{j=1}^n (\sigma_{\omega}(u_i, v_i) - 1) \ln(y_j - \delta_{\omega}(u_i, v_i)) (w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j - \delta_{\omega}(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_{\omega}(u_i, v_i)} (w_{ij})
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Langkah selanjutnya yaitu memaksimumkan fungsi *ln likelihood* pada persamaan (4.47). Memaksimumkan fungsi R^* dilakukan dengan cara mencari turunan pertama fungsi $\ln L(\omega)$ terhadap parameter $\beta_0(u_i, v_i)$, $\sigma_{\omega}(u_i, v_i)$ dan $\delta_{\omega}(u_i, v_i)$ seperti pada persamaan (4.48), (4.49) dan (4.50)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial R^*}{\partial \beta_0(u_i, v_i)} \\
&= \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^n \ln \sigma_{\omega}(u_i, v_i) (w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \beta_0(u_i, v_i) \sigma_{\omega}(u_i, v_i) (w_{ij}) \right.}{\partial \beta_0(u_i, v_i)} \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^n (\sigma_{\omega}(u_i, v_i) - 1) \ln(y_j - \delta_{\omega}(u_i, v_i)) (w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j - \delta_{\omega}(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_{\omega}(u_i, v_i)} (w_{ij}) \right) \\
&= - \sum_{j=1}^n \sigma_{\omega}(u_i, v_i) (w_{ij}) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j - \delta_{\omega}(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_{\omega}(u_i, v_i)} \sigma_{\omega}(u_i, v_i) (w_{ij})
\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial R^*}{\partial \sigma_\omega(u_i, v_i)} \\
&= \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^n \ln \sigma_\omega(u_i, v_i)(w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \beta_0(u_i, v_i) \sigma_\omega(u_i, v_i)(w_{ij}) \right.}{\partial \sigma_\omega(u_i, v_i)} \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^n (\sigma_\omega(u_i, v_i) - 1) \ln(y_j - \delta_\omega(u_i, v_i))(w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)} (w_{ij}) \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_\omega(u_i, v_i)} (w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \beta_0(u_i, v_i) (w_{ij}) + \sum_{j=1}^n \ln(y_j - \delta_\omega(u_i, v_i))(w_{ij}) \\
&\quad - \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{y_j - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)} \ln \left(\frac{y_j - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right) \right) (w_{ij}) \quad (4.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial R^*}{\partial \delta_\omega(u_i, v_i)} \\
&= \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^n \ln \sigma_\omega(u_i, v_i)(w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \beta_0(u_i, v_i) \sigma_\omega(u_i, v_i)(w_{ij}) \right.}{\partial \delta_\omega(u_i, v_i)} \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^n (\sigma_\omega(u_i, v_i) - 1) \ln(y_j - \delta_\omega(u_i, v_i))(w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)} (w_{ij}) \right) \\
&= - \sum_{j=1}^n (\sigma_\omega(u_i, v_i) - 1) \left(\frac{1}{y_j - \delta_\omega(u_i, v_i)} \right) (w_{ij}) \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \sigma_\omega(u_i, v_i) \left(\frac{\left(\frac{y_j - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i) - 1}}{e^{\beta_0(u_i, v_i) \sigma_\omega(u_i, v_i)}} \right) (w_{ij}) \quad (4.50)
\end{aligned}$$

Setelah mendapatkan penurunan pertama untuk parameter $\beta_0(u_i, v_i)$, $\sigma_\omega(u_i, v_i)$ dan $\delta_\omega(u_i, v_i)$ lalu disamakan dengan nol pada persamaan (4.51), (4.52) dan (4.53)

$$\begin{aligned}
& \bullet \quad \frac{\partial R^*}{\partial \beta_0(u_i, v_i)} = 0 \\
& - \sum_{j=1}^n \sigma_\omega(u_i, v_i) (w_{ij}) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)} \sigma_\omega(u_i, v_i) (w_{ij}) = 0 \quad (4.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \frac{\partial R^*}{\partial \sigma_\omega(u_i, v_i)} = 0 \\
& \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_\omega(u_i, v_i)} (w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \beta_0(u_i, v_i) (w_{ij}) + \sum_{j=1}^n \ln(y_j - \delta_\omega(u_i, v_i)) (w_{ij}) \\
& - \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{(y_j - \delta_\omega(u_i, v_i))}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)} \ln \left(\frac{(y_j - \delta_\omega(u_i, v_i))}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right) \right) (w_{ij}) = 0
\end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \frac{\partial R^*}{\partial \delta_\omega(u_i, v_i)} = 0 \\
& - \sum_{j=1}^n (\sigma_\omega(u_i, v_i) - 1) \left(\frac{1}{y_j - \delta_\omega(u_i, v_i)} \right) (w_{ij}) \\
& + \sum_{j=1}^n \sigma_\omega(u_i, v_i) \left(\frac{(y_j - \delta_\omega(u_i, v_i))^{\sigma_\omega(u_i, v_i) - 1}}{e^{\beta_0(u_i, v_i) \sigma_\omega(u_i, v_i)}} \right) (w_{ij}) = 0
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Berdasarkan persamaan (4.51), (4.52) dan (4.53) lalu dicari solusinya namun didapatkan hasil yang implisit dan tidak *closed form* sehingga digunakan iterasi *Newton Raphson*. Langkah-langkah dalam iterasi *Newton Raphson* antara lain Menentukan nilai taksiran awal parameter antara lain

$$\hat{\lambda}(u_i, v_i)_{(0)} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0(u_i, v_i)_{(0)} & \hat{\sigma}_\omega(u_i, v_i)_{(0)} & \hat{\delta}_\omega(u_i, v_i)_{(0)} \end{bmatrix}^T \tag{4.54}$$

Setelah itu membentuk vektor gradien (**g**) dan matriks Hessian (**H**) seperti pada persamaan (4.55) dan (4.56)

$$\mathbf{g}(\hat{\lambda}(u_i, v_i)_{(m)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial R^*}{\partial \beta_0(u_i, v_i)}, & \frac{\partial R^*}{\partial \sigma_\omega(u_i, v_i)}, & \frac{\partial R^*}{\partial \delta_\omega(u_i, v_i)} \end{bmatrix}^T \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{H}(\hat{\lambda}(u_i, v_i)_{(m)})_{(k+3) \times (k+3)} \\
& = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 R^*}{\partial \beta_0^2(u_i, v_i)} & \frac{\partial^2 R^*}{\partial \beta_0(u_i, v_i) \partial \sigma_\omega(u_i, v_i)} & \frac{\partial^2 R^*}{\partial \beta_0(u_i, v_i) \partial \delta_\omega(u_i, v_i)} \\ & \frac{\partial^2 R^*}{\partial \sigma_\omega^2(u_i, v_i)} & \frac{\partial^2 R^*}{\partial \sigma_\omega(u_i, v_i) \partial \delta_\omega(u_i, v_i)} \\ \text{simetris} & & \frac{\partial^2 R^*}{\partial \delta_\omega^2(u_i, v_i)} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Matriks Hessian merupakan turunan parsial kedua fungsi *ln likelihood* (R^*) pada persamaan (4.47) terhadap masing-masing parameter. Berikut merupakan turunan kedua fungsi (R^*) terhadap parameter $\beta_0(u_i, v_i)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R^*}{\partial \beta_0^2(u_i, v_i)} &= \frac{\partial}{\partial \beta_0(u_i, v_i)} \left(\frac{\partial R^*}{\partial \beta_0(u_i, v_i)} \right) \\
&= \frac{\partial \left(-\sum_{j=1}^n \sigma_\omega(u_i, v_i)(w_{ij}) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)} \sigma_\omega(u_i, v_i)(w_{ij}) \right)}{\partial \beta_0(u_i, v_i)} \\
&= 0 + \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^n (y_j - \delta_\omega(u_i, v_i))^{\sigma_\omega(u_i, v_i)} e^{-\beta_0(u_i, v_i) \sigma_\omega(u_i, v_i)} \sigma_\omega(u_i, v_i)(w_{ij}) \right)}{\partial \beta_0(u_i, v_i)} \\
&= \sum_{j=1}^n \left((y_j - \delta_\omega(u_i, v_i))^{\sigma_\omega(u_i, v_i)} \sigma_\omega(u_i, v_i) (-\sigma_\omega(u_i, v_i) e^{-\beta_0(u_i, v_i) \sigma_\omega(u_i, v_i)}) \right) (w_{ij}) \\
&= -\sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{y_j - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)} \sigma_\omega^2(u_i, v_i) \right) (w_{ij}) \tag{4.57}
\end{aligned}$$

Turunan fungsi (R^*) terhadap parameter $\beta_0(u_i, v_i)$ dan $\sigma_\omega(u_i, v_i)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R^*}{\partial \beta_0(u_i, v_i) \partial \sigma_\omega(u_i, v_i)} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_\omega(u_i, v_i)} \left(\frac{\partial R^*}{\partial \beta_0(u_i, v_i)} \right) \\
&= \frac{\partial \left(-\sum_{j=1}^n \sigma_\omega(u_i, v_i)(w_{ij}) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)} \sigma_\omega(u_i, v_i)(w_{ij}) \right)}{\partial \sigma_\omega(u_i, v_i)} \\
&= \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)} \sigma_\omega(u_i, v_i)(w_{ij}) \right)}{\partial \sigma_\omega(u_i, v_i)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\left(\frac{y_j - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)} \ln \left(\frac{y_j - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right) \sigma_\omega(u_i, v_i)}{+ \left(\frac{y_j - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)}} \right) (w_{ij}) \quad (4.58)$$

Turunan fungsi (R^*) terhadap parameter $\beta_0(u_i, v_i)$ dan $\delta_\omega(u_i, v_i)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R^*}{\partial \beta_0(u_i, v_i) \partial \delta_\omega(u_i, v_i)} &= \frac{\partial}{\partial \delta_\omega(u_i, v_i)} \left(\frac{\partial R^*}{\partial \beta_0(u_i, v_i)} \right) \\ &= \frac{\partial \left(-\sum_{j=1}^n \sigma_\omega(u_i, v_i) (w_{ij}) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)} \sigma_\omega(u_i, v_i) (w_{ij}) \right)}{\partial \delta_\omega(u_i, v_i)} \\ &= 0 + \sum_{j=1}^n \left(\sigma_\omega(u_i, v_i) e^{-\beta_0(u_i, v_i) \sigma_\omega(u_i, v_i)} \sigma_\omega(u_i, v_i) (y_j - \delta_\omega(u_i, v_i))^{\sigma_\omega(u_i, v_i)-1} (-1) \right) (w_{ij}) \\ &= -\sum_{j=1}^n \left(\sigma_\omega(u_i, v_i) e^{-\beta_0(u_i, v_i) \sigma_\omega(u_i, v_i)} \sigma_\omega(u_i, v_i) (y_j - \delta_\omega(u_i, v_i))^{\sigma_\omega(u_i, v_i)-1} \right) (w_{ij}) \end{aligned} \quad (4.59)$$

Berikut merupakan turunan kedua fungsi (R^*) terhadap parameter

$\sigma_\omega(u_i, v_i)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R^*}{\partial \sigma_\omega^2(u_i, v_i)} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_\omega(u_i, v_i)} \left(\frac{\partial R^*}{\partial \sigma_\omega(u_i, v_i)} \right) \\ &= \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_\omega(u_i, v_i)} (w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \beta_0(u_i, v_i) (w_{ij}) + \sum_{j=1}^n \ln(y_j - \delta_\omega(u_i, v_i)) (w_{ij}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{y_j - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)} \ln \left(\frac{y_j - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right) \right) (w_{ij}) \right)}{\partial \sigma_\omega(u_i, v_i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_{\omega}^2(u_i, v_i)} (w_{ij}) - 0 + 0 \\
&\quad - \sum_{j=1}^n \left(\ln \left(\frac{(y_j - \delta_{\omega}(u_i, v_i))}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right) \left(\frac{(y_j - \delta_{\omega}(u_i, v_i))}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_{\omega}(u_i, v_i)} \ln \left(\frac{(y_j - \delta_{\omega}(u_i, v_i))}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right) \right) (w_{ij}) \\
&= -\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_{\omega}^2(u_i, v_i)} (w_{ij}) \\
&\quad - \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{(y_j - \delta_{\omega}(u_i, v_i))}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_{\omega}(u_i, v_i)} \left(\ln \frac{(y_j - \delta_{\omega}(u_i, v_i))}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^2 \right) (w_{ij}) \\
&= -\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_{\omega}^2(u_i, v_i)} (w_{ij}) \\
&\quad - \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{(y_j - \delta_{\omega}(u_i, v_i))}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_{\omega}(u_i, v_i)} \ln^2 \left(\frac{(y_j - \delta_{\omega}(u_i, v_i))}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right) \right) (w_{ij}) \tag{4.60}
\end{aligned}$$

Berikut merupakan turunan kedua fungsi (R^*) terhadap parameter $\sigma_{\omega}(u_i, v_i)$ dan $\delta_{\omega}(u_i, v_i)$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 R^*}{\partial \sigma_{\omega}(u_i, v_i) \partial \delta_{\omega}(u_i, v_i)} = \frac{\partial}{\partial \delta_{\omega}(u_i, v_i)} \left(\frac{\partial R^*}{\partial \sigma_{\omega}(u_i, v_i)} \right) \\
&= \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_{\omega}(u_i, v_i)} (w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \beta_0(u_i, v_i) (w_{ij}) + \sum_{j=1}^n \ln(y_j - \delta_{\omega}(u_i, v_i)) (w_{ij}) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{(y_j - \delta_{\omega}(u_i, v_i))}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_{\omega}(u_i, v_i)} \ln \left(\frac{(y_j - \delta_{\omega}(u_i, v_i))}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right) \right) (w_{ij}) \right)}{\partial \delta_{\omega}(u_i, v_i)} \\
&= 0 - 0 + \sum_{j=1}^n \frac{-1}{(y_j - \delta_{\omega}(u_i, v_i))} (w_{ij}) \\
&\quad - \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{(y_j - \delta_{\omega}(u_i, v_i))}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_{\omega}(u_i, v_i)} \ln \left(\frac{(y_j - \delta_{\omega}(u_i, v_i))}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right) \right) (w_{ij}) \right)}{\partial \delta_{\omega}(u_i, v_i)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 - 0 + \sum_{j=1}^n \frac{-1}{(y_j - \delta_\omega(u_i, v_i))} (w_{ij}) \\
&\quad - \sum_{j=1}^n \left(\left(-\frac{\sigma_\omega(u_i, v_i)}{(y_j - \delta_\omega(u_i, v_i))} \left(\frac{y_j - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)} \ln \left(\frac{(y_j - \delta_\omega(u_i, v_i))}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right) \right) (w_{ij}) \right. \\
&\quad \left. - \left(\left(\frac{(y_j - \delta_\omega(u_i, v_i))}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)} \left(\frac{1}{(y_j - \delta_\omega(u_i, v_i))} \right) \right) (w_{ij}) \right) \\
&\hspace{25em} (4.61)
\end{aligned}$$

Berikut merupakan turunan kedua fungsi (R^*) terhadap parameter

$$\begin{aligned}
&\delta_\omega(u_i, v_i) \\
&\frac{\partial^2 R^*}{\partial \delta_\omega^2(u_i, v_i)} = \frac{\partial}{\partial \delta_\omega(u_i, v_i)} \left(\frac{\partial R^*}{\partial \delta_\omega(u_i, v_i)} \right) \\
&\quad \frac{\partial}{\partial \delta_\omega(u_i, v_i)} \left(-\sum_{j=1}^n (\sigma_\omega(u_i, v_i) - 1) \left(\frac{1}{y_j - \delta_\omega(u_i, v_i)} \right) (w_{ij}) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^n \sigma_\omega(u_i, v_i) \left(\frac{(y_j - \delta_\omega(u_i, v_i))^{\sigma_\omega(u_i, v_i) - 1}}{e^{\beta_0(u_i, v_i) \sigma_\omega(u_i, v_i)}} \right) (w_{ij}) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \delta_\omega(u_i, v_i)} \left(-\sum_{j=1}^n (\sigma_\omega(u_i, v_i) - 1) (y_j - \delta_\omega(u_i, v_i))^{-1} (w_{ij}) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^n \sigma_\omega(u_i, v_i) \left((y_j - \delta_\omega(u_i, v_i))^{\sigma_\omega(u_i, v_i) - 1} \right) (e^{\beta_0(u_i, v_i) \sigma_\omega(u_i, v_i)})^{-1} (w_{ij}) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \delta_\omega(u_i, v_i)} \left(-\sum_{j=1}^n (\sigma_\omega(u_i, v_i) - 1) (y_j - \delta_\omega(u_i, v_i))^{-2} (-1) (w_{ij}) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^n \sigma_\omega(u_i, v_i) (\sigma_\omega(u_i, v_i) - 1) \left((y_j - \delta_\omega(u_i, v_i))^{\sigma_\omega(u_i, v_i) - 2} \right) (-1) (e^{-\beta_0(u_i, v_i)})^{\sigma_\omega(u_i, v_i)} (w_{ij}) \right) \\
&= -\sum_{j=1}^n (\sigma_\omega(u_i, v_i) - 1) (y_j - \delta_\omega(u_i, v_i))^{-2} (w_{ij}) \\
&\quad - \sum_{j=1}^n \sigma_\omega(u_i, v_i) (\sigma_\omega(u_i, v_i) - 1) \left((y_j - \delta_\omega(u_i, v_i))^{\sigma_\omega(u_i, v_i) - 2} \right) (e^{-\beta_0(u_i, v_i)})^{\sigma_\omega(u_i, v_i)} (w_{ij}) \\
&\hspace{25em} (4.62)
\end{aligned}$$

Mensubstitusikan nilai $\hat{\lambda}(u_i, v_i)_{(0)}$ ke dalam elemen-elemen vektor $\mathbf{g}(\hat{\lambda}(u_i, v_i)_{(0)})$ dan matriks $\mathbf{H}(\hat{\lambda}(u_i, v_i)_{(0)})$. Lalu dimulai dari $m=0$ dilakukan iterasi pada persamaan (4.63)

$$\hat{\lambda}(u_i, v_i)_{(m+1)} = \hat{\lambda}(u_i, v_i)_{(m)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\lambda}(u_i, v_i)_{(m)}) \mathbf{g}(\hat{\lambda}(u_i, v_i)_{(m)}) \quad (4.63)$$

Jika belum mendapatkan penaksir parameter yang konvergen, maka dilanjutkan kembali hingga iterasi ke $m = m + 1$. Iterasi akan berhenti apabila nilai dari

$$\left\| \hat{\lambda}(u_i, v_i)_{(m+1)} - \hat{\lambda}(u_i, v_i)_{(m)} \right\| \leq \varepsilon \quad (4.64)$$

dimana ε adalah bilangan yang sangat kecil seperti 0,0001.

Proses iterasi *Newton Raphson* akan dilakukan untuk setiap lokasi ke- i , sehingga akan mendapatkan nilai $\hat{\lambda}(u_i, v_i)$ yang bersifat lokal untuk setiap wilayah.

Perbandingan dari fungsi $\ln L(\omega)$ dan $\ln L(\Omega)$ yang telah dimaksimumkan yaitu $\ln L(\hat{\omega})$ dan $\ln L(\hat{\Omega})$ dinyatakan dalam statistik uji G_2^2 :

$$\begin{aligned} G_2^2 &= -2 \ln \Lambda = -2 \ln \left(\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \right) = -2 \left(\ln L(\hat{\omega}) - \ln L(\hat{\Omega}) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \ln \hat{\sigma}_{\omega}(u_i, v_i)(w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \hat{\beta}_0(u_i, v_i) \hat{\sigma}_{\omega}(u_i, v_i)(w_{ij}) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n (\hat{\sigma}_{\omega}(u_i, v_i) - 1) \ln(y_j - \hat{\sigma}_{\omega}(u_i, v_i))(w_{ij}) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_j - \hat{\sigma}_{\omega}(u_i, v_i)}{e^{\hat{\beta}_0(u_i, v_i)}} \right)^{\hat{\sigma}_{\omega}(u_i, v_i)} (w_{ij}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_2^2 = & -2 \left(\sum_{i=1}^n \ln \hat{\sigma}_\omega(u_i, v_i)(w_{ij}) - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_0(u_i, v_i) \hat{\sigma}_\omega(u_i, v_i)(w_{ij}) \right. \\
& + \sum_{i=1}^n (\hat{\sigma}_\omega(u_i, v_i) - 1) \ln(y_i - \hat{\delta}_\omega(u_i, v_i))(w_{ij}) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \hat{\delta}_\omega(u_i, v_i)}{e^{\hat{\beta}_0(u_i, v_i)}} \right)^{\hat{\sigma}_\omega(u_i, v_i)} (w_{ij}) \\
& - \sum_{i=1}^n \ln \hat{\sigma}(u_i, v_i)(w_{ij}) + \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}(u_i, v_i) \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}(u_i, v_i)(w_{ij}) \\
& \left. - \sum_{i=1}^n (\hat{\sigma}(u_i, v_i) - 1) \ln(y_i - \hat{\delta}(u_i, v_i))(w_{ij}) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \hat{\delta}(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}(u_i, v_i)}} \right)^{\hat{\sigma}(u_i, v_i)} (w_{ij}) \right) \\
\\
G_2^2 = & \left(-2 \sum_{i=1}^n \ln \hat{\sigma}_\omega(u_i, v_i)(w_{ij}) + 2 \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_0(u_i, v_i) \hat{\sigma}_\omega(u_i, v_i)(w_{ij}) \right. \\
& - 2 \sum_{i=1}^n (\hat{\sigma}_\omega(u_i, v_i) - 1) \ln(y_i - \hat{\delta}_\omega(u_i, v_i))(w_{ij}) + 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \hat{\delta}_\omega(u_i, v_i)}{e^{\hat{\beta}_0(u_i, v_i)}} \right)^{\hat{\sigma}_\omega(u_i, v_i)} (w_{ij}) \\
& + 2 \sum_{i=1}^n \ln \hat{\sigma}(u_i, v_i)(w_{ij}) - 2 \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}(u_i, v_i) \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}(u_i, v_i)(w_{ij}) \\
& \left. + 2 \sum_{i=1}^n (\hat{\sigma}(u_i, v_i) - 1) \ln(y_i - \hat{\delta}(u_i, v_i))(w_{ij}) - 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \hat{\delta}(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}(u_i, v_i)}} \right)^{\hat{\sigma}(u_i, v_i)} (w_{ij}) \right)
\end{aligned} \tag{4.65}$$

4.2.2 Pengujian Serentak Parameter Model GWUWR ($\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)$)

Pengujian serentak parameter model GWUWR dilakukan untuk mengetahui tingkat signifikansi pada seluruh parameter $\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)$ secara bersama-sama.

Hipotesis :

$$H_0 : \beta_1(u_i, v_i) = \beta_2(u_i, v_i) = \dots = \beta_k(u_i, v_i) = 0$$

$$H_1 : \text{Minimal ada satu } \beta_j(u_i, v_i) \neq 0 \quad ; i = 1, 2, \dots, n \quad ; j = 1, 2, \dots, k$$

Dimana k merupakan jumlah variabel prediktor

Himpunan parameter di bawah populasi $H_1(\Omega)$ adalah

$$\begin{aligned}\Omega &= (\beta_0(u_i, v_i), \beta_1(u_i, v_i), \dots, \beta_k(u_i, v_i), \sigma(u_i, v_i), \delta(u_i, v_i)) \\ &= (\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i), \sigma(u_i, v_i), \delta(u_i, v_i))\end{aligned}$$

Himpunan parameter di bawah H_0 (ω) adalah

$$\omega = (\beta_0(u_i, v_i), \sigma_\omega(u_i, v_i), \delta_\omega(u_i, v_i))$$

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^n \sigma(u_i, v_i) \frac{1}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}\right)^{\sigma(u_i, v_i)}} (y_i - \delta(u_i, v_i))^{\sigma(u_i, v_i)-1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}}\right)^{\sigma(u_i, v_i)}\right)}$$

$$\begin{aligned}\ln L(\Omega) &= \sum_{i=1}^n \ln \sigma(u_i, v_i) - \sum_{i=1}^n \sigma(u_i, v_i) \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) \\ &+ \sum_{i=1}^n (\sigma(u_i, v_i) - 1) \ln(y_i - \delta(u_i, v_i)) - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma(u_i, v_i)} \right)\end{aligned}$$

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^n \sigma_\omega(u_i, v_i) \frac{1}{\left(e^{\beta_0(u_i, v_i)}\right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)}} (y_i - \delta_\omega(u_i, v_i))^{\sigma_\omega(u_i, v_i)-1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}}\right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)}\right)}$$

$$\begin{aligned}\ln L(\omega) &= \sum_{i=1}^n \ln \sigma_\omega(u_i, v_i) - \sum_{i=1}^n \sigma_\omega(u_i, v_i) \beta_0(u_i, v_i) \\ &+ \sum_{i=1}^n (\sigma_\omega(u_i, v_i) - 1) \ln(y_i - \delta_\omega(u_i, v_i)) - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta_\omega(u_i, v_i)}{e^{\beta_0(u_i, v_i)}} \right)^{\sigma_\omega(u_i, v_i)} \right)\end{aligned}$$

Selanjutnya fungsi $\ln L(\Omega)$ dan $\ln L(\omega)$ dikalikan dengan pembobot (w_{ij}). Langkah selanjutnya yaitu memaksimumkan fungsi \ln *likelihood* di bawah populasi yaitu $\ln L(\Omega)$ dan di bawah H_0 yaitu $\ln L(\omega)$ dimana $\ln L(\hat{\Omega})$ merupakan nilai \ln *likelihood* untuk model lengkap dengan menyertakan semua variabel prediktor dan $\ln L(\hat{\omega})$ merupakan nilai \ln *likelihood* untuk model tanpa menyertakan variabel prediktor.

$$\ln L(\hat{\Omega}) = \max_{\Omega} \ln L(\Omega)$$

$$\begin{aligned}\ln L(\hat{\Omega}) &= \sum_{i=1}^n \ln \hat{\sigma}(u_i, v_i)(w_{ij}) - \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}(u_i, v_i) \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}(u_i, v_i)(w_{ij}) \\ &+ \sum_{i=1}^n (\hat{\sigma}(u_i, v_i) - 1) \ln(y_i - \hat{\delta}(u_i, v_i))(w_{ij}) - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \hat{\delta}(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}(u_i, v_i)}} \right)^{\hat{\sigma}(u_i, v_i)} (w_{ij}) \right)\end{aligned}$$

$$\ln L(\hat{\omega}) = \max_{\omega} \ln L(\omega)$$

$$\begin{aligned}\ln L(\hat{\omega}) &= \sum_{i=1}^n \ln \hat{\sigma}_{\omega}(u_i, v_i)(w_{ij}) - \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_{\omega}(u_i, v_i) \hat{\beta}_0(u_i, v_i)(w_{ij}) \\ &+ \sum_{i=1}^n (\hat{\sigma}_{\omega}(u_i, v_i) - 1) \ln(y_i - \hat{\delta}_{\omega}(u_i, v_i))(w_{ij}) - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \hat{\delta}_{\omega}(u_i, v_i)}{e^{\hat{\beta}_0(u_i, v_i)}} \right)^{\hat{\sigma}_{\omega}(u_i, v_i)} (w_{ij}) \right)\end{aligned}$$

Setelah itu menghitung statistik uji *likelihood ratio* (G^2)

$$G^2 = -2 \ln \Lambda = -2 \ln \left(\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \right) = -2 (\ln L(\hat{\omega}) - \ln L(\hat{\Omega}))$$

$$G^2 = -2 \left(\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \ln \hat{\sigma}_{\omega}(u_i, v_i)(w_{ij}) - \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_{\omega}(u_i, v_i) \hat{\beta}_0(u_i, v_i)(w_{ij}) \\ &+ \sum_{i=1}^n (\hat{\sigma}_{\omega}(u_i, v_i) - 1) \ln(y_i - \hat{\delta}_{\omega}(u_i, v_i))(w_{ij}) - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \hat{\delta}_{\omega}(u_i, v_i)}{e^{\hat{\beta}_0(u_i, v_i)}} \right)^{\hat{\sigma}_{\omega}(u_i, v_i)} (w_{ij}) \right) \\ &- \sum_{i=1}^n \ln \hat{\sigma}(u_i, v_i)(w_{ij}) + \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}(u_i, v_i) \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}(u_i, v_i)(w_{ij}) \\ &- \sum_{i=1}^n (\hat{\sigma}(u_i, v_i) - 1) \ln(y_i - \hat{\delta}(u_i, v_i))(w_{ij}) + \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \hat{\delta}(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}(u_i, v_i)}} \right)^{\hat{\sigma}(u_i, v_i)} (w_{ij}) \right) \end{aligned} \right)$$

$$G^2 = \left(\begin{aligned} & -2 \sum_{i=1}^n \ln \hat{\sigma}_\omega(u_i, v_i) (w_{ij}) + 2 \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_\omega(u_i, v_i) \hat{\beta}_0(u_i, v_i) (w_{ij}) \\ & -2 \sum_{i=1}^n (\hat{\sigma}_\omega(u_i, v_i) - 1) \ln(y_i - \hat{\delta}_\omega(u_i, v_i)) (w_{ij}) + 2 \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \hat{\delta}_\omega(u_i, v_i)}{e^{\hat{\beta}_0(u_i, v_i)}} \right)^{\hat{\sigma}_\omega(u_i, v_i)} (w_{ij}) \right) \\ & + 2 \sum_{i=1}^n \ln \hat{\sigma}(u_i, v_i) (w_{ij}) - 2 \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}(u_i, v_i) \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}(u_i, v_i) (w_{ij}) \\ & + 2 \sum_{i=1}^n (\hat{\sigma}(u_i, v_i) - 1) \ln(y_i - \hat{\delta}(u_i, v_i)) (w_{ij}) - 2 \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \hat{\delta}(u_i, v_i)}{e^{\mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}(u_i, v_i)}} \right)^{\hat{\sigma}(u_i, v_i)} (w_{ij}) \right) \end{aligned} \right) \quad (4.66)$$

Kriteria daerah penolakan yaitu tolak H_0 jika $G^2 > \chi_{k, \alpha}^2$

4.2.3 Pengujian Parsial Parameter Model GWUWR ($\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)$)

Pengujian parsial parameter model GWUWR dilakukan untuk mengetahui signifikansi pada masing-masing parameter $\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)$.

Hipotesis :

$$H_0 : \beta_j(u_i, v_i) = 0$$

$$H_1 : \beta_j(u_i, v_i) \neq 0 \quad ; i = 1, 2, \dots, n \quad ; j = 1, 2, \dots, k$$

Statistik uji :

$$Z_{hit} = \frac{\hat{\beta}_j(u_i, v_i)}{SE(\hat{\beta}_j(u_i, v_i))} \text{ dimana } SE(\hat{\beta}_j(u_i, v_i)) = \sqrt{\text{var}(\hat{\beta}_j(u_i, v_i))} \quad (4.67)$$

$\hat{\beta}_j(u_i, v_i)$ merupakan taksiran parameter $\beta_j(u_i, v_i)$ dan $SE(\hat{\beta}_j(u_i, v_i))$ adalah taksiran *standart error* yang didapatkan dari elemen diagonal ke- $j+1$ dari matriks varian covarian $(\hat{\beta}_j(u_i, v_i))$. Sedangkan $\text{var}(\hat{\beta}_j)$ didapatkan dari persamaan

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(\hat{\beta}) &= - \left[\mathbf{H}(\hat{\beta}(u_i, v_i)_{(m)})_{(k+3) \times (k+3)} \right]^{-1} \\
&= - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q^*}{\partial \beta^T(u_i, v_i) \partial \beta(u_i, v_i)} & \frac{\partial^2 Q^*}{\partial \beta^T(u_i, v_i) \partial \sigma(u_i, v_i)} & \frac{\partial^2 Q^*}{\partial \beta^T(u_i, v_i) \partial \delta(u_i, v_i)} \\ \frac{\partial^2 Q^*}{\partial \sigma^2(u_i, v_i)} & \frac{\partial^2 Q^*}{\partial \sigma(u_i, v_i) \partial \delta(u_i, v_i)} & \frac{\partial^2 Q^*}{\partial \delta^2(u_i, v_i)} \\ \text{simetris} & & \end{bmatrix} \quad (4.68)
\end{aligned}$$

Kriteria daerah penolakan yaitu tolak H_0 jika $|Z_{hit}| > Z_{\alpha/2}$

4.3 Faktor-faktor Yang Berpengaruh Terhadap *Chemical Oxygen Demand* (COD)

Metode *Geographically Weighted Univariate Weibull Regression* (GWUWR) dalam penelitian ini diterapkan pada masalah pencemaran kualitas air sungai yaitu mencari faktor-faktor apa saja yang berpengaruh terhadap indikator pencemaran sungai Surabaya. Salah satu cara untuk menilai seberapa besar pencemaran air yaitu dengan melihat kandungan oksigen yang terlarut di dalam air. *Chemical Oxygen Demand* (COD) menunjukkan jumlah oksigen terlarut yang dibutuhkan oleh organisme hidup untuk menguraikan atau mengoksidasi bahan-bahan buangan di dalam air. COD digunakan sebagai parameter pencemaran air dan baku mutu air limbah. Perbedaan karakteristik sungai seperti lebar sungai, kedalaman sungai dan suhu air sungai antar lokasi berpengaruh terhadap perbedaan jumlah oksigen di lokasi yang satu dengan yang lain. Oleh karena itu, dalam penelitian ini digunakan metode GWUWR pada data pencemaran sungai di Surabaya.

4.3.1 Uji Anderson Darling

Pengujian Anderson Darling merupakan salah satu metode statistik yang digunakan dalam pengujian kesesuaian distribusi. Adapun hipotesis yang digunakan yaitu

$$H_0 : F_{(y)} = F_{(y)}^0 \text{ (variabel dependen sesuai dengan distribusi dugaan)}$$

$H_1 : F_{(y)} \neq F_{(y)}^0$ (variabel dependen tidak sesuai dengan distribusi dugaan)

Tolak H_0 jika nilai $A_{hit}^2 > A_{\alpha}^2$

Tabel 4. 1 Uji Distribusi Data Y (COD)

Distribusi	A_{hit}^2	P-value	$A_{0,1}^2$	Parameter	Keputusan
Normal	2,692	< 0,005	0,614		Tolak H_0
Eksponensial	4,008	< 0,003	0,162		Tolak H_0
Weibull	1,718	< 0,010	0,637		Tolak H_0
Weibull 3 parameter	0,621	0,110	0,637	$\sigma = 1,04491$ $\theta = 15,69809$ $\delta = 9,45492$	Gagal Tolak H_0
Gamma	1,196	< 0,005	0,635		Tolak H_0

Berdasarkan Tabel 4. menunjukkan bahwa *Chemical Oxygen Demand* (COD) sesuai dengan distribusi weibull 3 parameter.

4.3.2 Deskripsi *Chemical Oxygen Demand* (COD) dan Faktor-faktor yang Mempengaruhinya

Sebagai gambaran awal mengenai *Chemical Oxygen Demand* (COD) sungai di Surabaya, maka berikut ini disajikan tabel statistika deskriptif dari variabel respon yaitu jumlah *Chemical Oxygen Demand* (COD) sungai di Surabaya dan 4 variabel prediktor yang diduga mempengaruhinya.

Tabel 4. 2 Statistika Deskriptif Variabel Penelitian

Variabel	Mean	Varsians	Minimum	Maksimum
Y	24,85	303,51	10,05	99,41
X_1	15,36	204,88	4,00	65,00
X_2	2,047	2,056	0,2	6,300
X_3	1,254	0,769	0,11	3,080
X_4	130,3	79757,4	0,1	1087,6

Berdasarkan Tabel 4. menunjukkan bahwa jumlah *Chemical Oxygen Demand* (COD) paling banyak 99,41 mg/l dan paling sedikit 10,05 mg/l. Rata-rata dari jumlah *Chemical Oxygen Demand* (COD) di setiap sungai Surabaya adalah 24,85 mg/l. Varians dari variabel respon sebesar 303,51. Hal ini menunjukkan bahwa varians *Chemical Oxygen Demand* (COD) cukup besar karena terdapat

sungai dengan jumlah *Chemical Oxygen Demand* (COD) hampir 100 mg/l namun ada pula sungai dengan jumlah COD sedikit.

4.3.3 Pemeriksaan Multikolinearitas

Pemeriksaan multikolinearitas dilakukan untuk mengetahui apakah antar variabel prediktor tidak terdapat korelasi. Uji multikolinearitas dilakukan sebagai asumsi untuk penaksiran parameter awal sehingga sebelum melanjutkan analisis dengan menggunakan metode regresi univariat weibull dan GWUWR maka akan dilakukan pemeriksaan multikolinearitas. Untuk mendeteksi adanya kasus multikolinearitas digunakan nilai VIF (*Variance Inflation Factor*). Apabila terdapat variabel prediktor dengan nilai $VIF > 10$, maka dapat disimpulkan bahwa terdapat kasus multikolinieritas. Berikut merupakan tabel nilai VIF pada masing-masing variabel prediktor :

Tabel 4. 3 VIF Variabel Prediktor

Variabel	VIF
X ₁	2,009
X ₂	1,593
X ₃	2,348
X ₄	3,138

Berdasarkan **Tabel 4. 3**, nilai VIF semua variabel prediktor kurang dari 10, sehingga dapat disimpulkan bahwa tidak terdapat kasus multikolinieritas pada keempat variabel prediktor sehingga semua variabel prediktor dapat digunakan dalam pemodelan regresi univariat weibull dan GWUWR.

4.3.4 Pemodelan *Chemical Oxygen Demand* (COD) dengan Regresi Univariat Weibull

Berdasarkan data Badan Lingkungan Hidup (BLH) Kota Surabaya, jumlah kadar *Chemical Oxygen Demand* (COD) pada 30 lokasi sungai di Surabaya mengikuti distribusi weibul 3 parameter. Selanjutnya akan dilakukan pemodelan regresi weibull untuk mengetahui apakah secara statistik keempat variabel bebas tersebut juga menunjukkan pengaruh terhadap angka *Chemical*

Oxygen Demand (COD). Pengujian parameter model regresi bertujuan untuk mengetahui apakah parameter tersebut telah menunjukkan hubungan yang nyata antara variabel prediktor dan variabel respon.

Pengujian parameter secara serentak merupakan pengujian secara bersama semua parameter dalam model regresi. Hipotesisnya adalah :

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$$

$$H_1 : \text{minimal ada satu } \beta_j \neq 0 ; j = 1, 2, 3, 4$$

Tabel 4. 4 Nilai Devians Model Regresi Weibull

Variabel	Nilai
Log likelihood	10,40968
Df	4

Hasil pengujian secara serentak model regresi weibull didapatkan nilai $G_{hit}^2 = 10,40968$ yang lebih dari $\chi_{0,1;4}^2 = 7,7794$ sehingga diputuskan untuk tolak H_0 (Tabel 4. 3). Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa pemodelan dengan menggunakan regresi weibull menghasilkan parameter yang nyata berpengaruh pada taraf signifikansi alpha 10 persen.

Berdasarkan hasil pengujian serentak pada model regresi weibull diperoleh kesimpulan bahwa variabel prediktor secara serentak berpengaruh signifikan terhadap variabel respon. Selanjutnya akan dilakukan pengujian parsial parameter regresi weibull guna mengetahui variabel prediktor apa saja yang berpengaruh terhadap variabel COD. Berikut merupakan hasil taksiran parameter regresi weibull

Tabel 4. 5 Hasil Taksiran Parameter Regresi Weibull

Variabel	Taksiran	SE	Z	Keputusan
$\hat{\beta}_0$	2,921	0,0689	42,3589	Tolak H_0
$\hat{\beta}_1$	-0,010	0,0028	-3,5447	Tolak H_0
$\hat{\beta}_2$	-0,363	0,0252	-14,3767	Tolak H_0
$\hat{\beta}_3$	0,564	0,0501	11,2558	Tolak H_0
$\hat{\beta}_4$	-0,0007	0,0002	-4,1399	Tolak H_0

Keterangan : *) signifikan pada $\alpha = 10\%$ ($Z_{0,95} = 1,64$)

Berdasarkan pengujian parsial parameter regresi weibull pada Tabel 4.5 diketahui bahwa keempat variabel yaitu lebar sungai (X_1), kedalaman sungai (X_2), kecepatan air (X_3) dan debit sungai (X_4) berpengaruh terhadap COD sungai Surabaya karena $|Z_{hit}| > Z_{\alpha/2}$.

4.3.5 Pemodelan *Chemical Oxygen Demand* (COD) dengan GWUWR

Model Geographically Weighted Univariate Weibull Regression (GWUWR) adalah pengembangan dari model regresi weibull dimana setiap parameter dihitung pada setiap titik lokasi, sehingga setiap titik lokasi geografis mempunyai nilai parameter regresi yang berbeda-beda. Faktor geografis diwakili oleh letak geografis lokasi sungai di Surabaya berupa titik koordinat Lintang Selatan (LS) dan Bujur Timur (BT) seperti pada Lampiran 2. Setelah itu dapat ditentukan jarak *eucliden* antar lokasi yang terdapat pada Lampiran 11. Pemodelan GWUWR ini menggunakan fungsi kernel *Bisquare*.

4.3.5.1 Penentuan *Bandwidth* Optimum

Tahap awal dalam penggunaan pemodelan GWUWR adalah menentukan letak geografis tiap titik sungai di Surabaya. Setelah itu dilanjutkan dalam perhitungan *bandwidth* (b). Nilai CV minimum digunakan untuk memperoleh nilai *bandwidth* yang optimum, sehingga masing-masing titik sungai mempunyai nilai *bandwidth* optimum yang berbeda-beda.

Adapun penghitungan nilai *bandwidth* selanjutnya digunakan untuk menyusun matriks pembobot setiap titik lokasi ke- i . Terdapat 30 pembobot yaitu sampai u_{30}, v_{30} yang dihitung berdasarkan pusat yang berbeda. Matrik pembobot terlampir pada Lampiran 12. Setelah ditemukan matrik pembobot maka di dapatkan taksiran parameter di setiap lokasi ke- i .

4.3.5.2 Pengujian parameter model GWUWR

a. Pengujian Kesamaan Model GWUWR

Pengujian kesamaan model GWUWR dilakukan untuk menguji signifikansi faktor geografis yang memberikan pengaruh pada variabel lokal, yaitu membandingkan kesamaan antara model GWUWR dengan model regresi univariat weibul.

Hipotesis :

$$H_0 : \beta_j(u_i, v_i) = \beta_j \quad ; i = 1, 2, \dots, 30 ; j = 1, 2, 3, 4$$

$$H_1 : \text{Minimal ada satu } \beta_j(u_i, v_i) \neq \beta_j$$

Tabel 4. 6 Perbandingan Nilai Devians Model Regresi Weibull dan GWUWR

Variabel	Devians (G^2)	df	G^2/df	F _{hit}	$F_{(\alpha, df_1, df_2)}$
Regresi Weibull ⁽¹⁾	32,22697	4	8,0567	1,307	4,11
GWUWR ⁽²⁾	24,6524	4	6,1631		

Keterangan : *) tidak signifikan pada $\alpha = 10\%$

Berdasarkan Tabel 4.6 diperoleh nilai statistik uji F_{hitung} (1,307) yang kurang dari $F_{(0,1;4;4)}$ yaitu 4,11 sehingga diputuskan gagal tolak H₀ yang berarti tidak ada perbedaan yang signifikan antara model regresi univariat weibull dengan GWUWR.

b. Pengujian Serentak Parameter Model GWUWR

Pengujian serentak parameter model GWUWR dilakukan untuk mengetahui tingkat signifikansi pada seluruh parameter $\beta(u_i, v_i)$ secara bersama-sama.

Hipotesis :

$$H_0 : \beta_1(u_i, v_i) = \beta_2(u_i, v_i) = \beta_3(u_i, v_i) = \beta_4(u_i, v_i) = 0$$

$$H_1 : \text{Minimal ada satu } \beta_j(u_i, v_i) \neq 0 \quad ; i = 1, 2, \dots, 30 ; j = 1, 2, 3, 4$$

Berikut merupakan hasil pengujian serentak model GWUWR

Tabel 4. 7 Uji Serentak model GWUWR

Devians (G^2)	Df	$\chi^2_{0,1;4}$
24,6524	4	7,7794

Keterangan : *) tidak signifikan pada $\alpha = 10\%$

Hasil pengujian secara serentak model GWUWR didapatkan nilai $G^2_{hit} = 24,6524$ yang lebih dari $\chi^2_{0,1;4} = 7,7794$ sehingga diputuskan untuk tolak H_0 (Tabel 4. 3). Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa pemodelan dengan menggunakan GWUWR menghasilkan parameter yang nyata berpengaruh pada taraf signifikansi alpha 10 persen.

c. Pengujian Parsial Parameter Model GWUWR

Pengujian parsial parameter model GWUWR dilakukan untuk mengetahui signifikansi pada masing-masing parameter $\beta(u_i, v_i)$.

Hipotesis :

$$H_0 : \beta_j(u_i, v_i) = 0$$

$$H_1 : \beta_j(u_i, v_i) \neq 0$$

Penghitungan statistik uji parameter model GWUWR dilakukan untuk masing-masing parameter di setiap lokasi sungai Surabaya yang akan dilampirkan pada Lampiran 16 dan Lampiran 17. Setelah itu hasil Z_{hit} dibandingkan dengan $Z_{tabel}(0,05) = 1,64$. Apabila diperoleh nilai $|Z_{hit}| > Z_{tabel}$ maka diputuskan tolak H_0 yang berarti parameter ke- k signifikan pada lokasi ke- i dimana $i = 1, 2, \dots, 30$.

Berikut merupakan hasil pengujian parameter model GWUWR di Kali Surabaya di Kedurus.

Tabel 4. 8 Hasil Taksiran Parameter GWUWR di Kali Surabaya Kedurus

Variabel	Koefisien	Z_{hit}
Intersep	2,920039	42,16667
X ₁	-0,009975	-3,5028*
X ₂	-0,363439	-14,3652*
X ₃	0,563777	11,2095*
X ₄	-0,000741	-4,10674*

Keterangan : *) signifikan pada $\alpha = 10\%$

Tabel 4.8 menunjukkan bahwa keempat variabel berpengaruh signifikan terhadap kadar *Chemical Oxygen Demand* (COD) di Kali Surabaya di Kedurus yaitu variabel lebar sungai (X_1), kedalaman sungai (X_2), kecepatan air (X_3) dan debit sungai (X_4).

Variabel-variabel yang nyata berpengaruh secara signifikan terhadap kadar *Chemical Oxygen Demand* (COD) tiap lokasi sungai di Surabaya dengan analisis GWUWR tersaji pada tabel berikut ini.

Tabel 4.9 Variabel yang signifikan dalam model GWUWR di Sungai di Surabaya

Lokasi Sungai	Variabel yang Berpengaruh Signifikan
Kali Surabaya Kedurus, Kali Surabaya Jembatan Wonokromo, Kalimas jembatan Ngagel, Kalimas jembatan Keputran Selatan, Kalimas jembatan Kebon Rojo, Kali Jeblokan Petojo, Kali Jeblokan Kedung Cowek, Kali Pegirian Undaan, Kali Pegirian Jl Pegirian, Kali Banyuurip, Kali Greges, Kalidami, Kalibokor, Kali Wonorejo, Kali Kepiting, Kali Kebon Agung, Kali Wonokromo, Saluran Dinoyo, Saluran Darmo, Saluran Kenari, Bozem Kalidami, Bozem Wonorejo, Bozem Morokrempangan, Bozem Kedurus, Kali Makmur, Kali Banyu Urip, Saluran Margomulyo, Kali Krempangan, Saluran Tambak Wedi di Pompa air, Saluran Tambak Wedi di Kenjeran	X_1, X_2, X_3, X_4

Tabel 4.9 menjelaskan bahwa variabel yang berpengaruh signifikan terhadap jumlah kadar *Chemical Oxygen Demand* (COD) di Kali Surabaya Kedurus, Kali Surabaya Jembatan Wonokromo, Kalimas jembatan Ngagel, Kalimas jembatan Keputran Selatan, Kalimas jembatan Kebon Rojo, Kali Jeblokan Petojo, Kali Jeblokan Kedung Cowek, Kali Pegirian Undaan, Kali Pegirian Jl Pegirian, Kali Banyuurip, Kali Greges, Kalidami, Kalibokor, Kali Wonorejo, Kali Kepiting, Kali Kebon Agung, Kali Wonokromo, Saluran Dinoyo, Saluran Darmo, Saluran Kenari, Bozem Kalidami, Bozem Wonorejo, Bozem Morokrempangan, Bozem Kedurus, Kali Makmur, Kali Banyu Urip, Saluran Margomulyo, Kali Krempangan, Saluran Tambak Wedi di Pompa air, Saluran

Tambak Wedi di Kenjeran adalah lebar sungai (X_1), kedalaman sungai (X_2), kecepatan air (X_3) dan debit sungai (X_4).

Untuk menentukan kelas sungai pada setiap lokasi berdasarkan pada ambang batas COD dapat dicari dengan menggunakan plot fungsi distribusi kumulatif.

Tabel 4.10 merupakan ringkasan penentuan kelas sesuai Gambar 4.1 sampai 4.6 untuk setiap lokasi sungai di Surabaya.

Tabel 4.10 Penentuan Kelas Setiap Lokasi

Penentuan Kelas	Lokasi
1	-
2	Kali Surabaya Kedurus, Kali Surabaya Jembatan Wonokromo, Kalimas jembatan Kebon Rojo, Kali Jeblokan Petojo, Kali Jeblokan Kedung Cowek, Kali Pegirian Undaan, Kali Pegirian Jl Pegirian, Kalibokor jembatan Pucang, Kali Wonorejo jembatan Kedung Baruk, Kali Kepiting,, Kali Kebon Agung, Kali Wonokromo jembatan Merr II, Saluran Darmo pompa air Darmo, Bozem Kalidami, Bozem Wonorejo, Bozem Morokrengan, Bozem Kedurus, Kali Makmur Lidah Kulon, Kali Banyu Urip pompa air Gunungsari, Saluran Margomulyo, Saluran Tambak Wedi di Pompa air Tambak Wedi
3	Kalimas jembatan Keputran Selatan, Kali Banyuurip jembatan Balongsari, Kali Greges, Saluran Dinoyo, Saluran Kenari, Kali Krengan, Saluran Tambak Wedi di Kenjeran
4	Kalimas jembatan Ngagel, Kalidami jembatan Kalidami

Berdasarkan Tabel 4.10 diketahui bahwa Kali Surabaya Kedurus, Kali Surabaya Jembatan Wonokromo, Kalimas jembatan Kebon Rojo, Kali Jeblokan Petojo, Kali Jeblokan Kedung Cowek, Kali Pegirian Undaan, Kali Pegirian Jl Pegirian, Kalibokor jembatan Pucang, Kali Wonorejo jembatan Kedung Baruk, Kali Kepiting,, Kali Kebon Agung, Kali Wonokromo jembatan Merr II, Saluran Darmo pompa air Darmo, Bozem Kalidami, Bozem Wonorejo, Bozem Morokrengan, Bozem Kedurus, Kali Makmur Lidah Kulon, Kali Banyu Urip pompa air Gunungsari, Saluran Margomulyo, Saluran Tambak Wedi di Pompa air Tambak masuk dalam Kelas 2 yaitu memiliki kadar COD di bawah ambang batas 25 mg/l. Sedangkan yang masuk dalam Kelas 3 yaitu dengan kadar COD di bawah ambang batas 50 mg/l antara lain Kalimas jembatan Keputran Selatan, Kali

Banyuurip jembatan Balongsari, Kali Greges, Saluran Dinoyo, Saluran Kenari, Kali Krembangan, Saluran Tambak Wedi di Kenjeran. Dan yang masuk dalam Kelas 4 yaitu dengan kadar COD di bawah ambang batas 100 mg/l antara lain Kalimas jembatan Ngagel dan Kalidami jembatan Kalidami.

Air badan air Kalimas di jembatan Ngagel, air badan air Kali Greges di jembatan jalan Dupak dan air badan air Kalidami di jembatan Kalidami berturut-turut mempunyai peluang sebesar 0,9671; 0,9021 dan 0,9758 dengan tingkat pencemar COD tertinggi sehingga ketiga lokasi tersebut perlu diwaspadai.

halaman ini sengaja dikosongkan

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian ini, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Model GWUWR merupakan bentuk lokal dari model regresi Weibull dengan mempertimbangkan pengaruh faktor spasial. Penaksiran parameter model GWUWR menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) yang dibantu dengan iterasi *Newton Raphson*.
2. Pengujian kesamaan model GWUWR dan model regresi weibull memberikan kesimpulan bahwa tidak terdapat perbedaan yang signifikan antara model GWUWR dan model regresi weibull sedangkan pengujian serentak parameter model GWUWR memberikan kesimpulan bahwa secara serentak variabel prediktor berpengaruh terhadap model.
3. Pemodelan GWUWR dengan pembobot *Adaptive Bisquare* membentuk satu kelompok lokasi sungai berdasarkan kesamaan variabel prediktor yang signifikan. Faktor-faktor yang berpengaruh terhadap *Chemical Oxygen Demand* (COD) di sungai Surabaya berdasarkan model GWUWR antara lain lebar sungai (X_1), kedalaman sungai (X_2), kecepatan air (X_3) dan debit sungai (X_4).

5.2 Saran

Saran yang dapat diberikan berdasarkan penelitian ini antara lain sebagai berikut:

1. Faktor-faktor yang berpengaruh berdasarkan model GWUWR adalah lebar sungai (X_1), kedalaman sungai (X_2), kecepatan air (X_3) dan debit sungai (X_4), sehingga dapat dipertimbangkan untuk dijadikan variabel penelitian untuk kasus indikator pencemaran sungai pada penelitian selanjutnya.
2. Dalam penelitian selanjutnya dapat menggunakan metode pembobot lain karena pemilihan metode pembobot juga mempengaruhi hasil yang diperoleh.

3. Selain itu juga dapat menggunakan metode iterasi lain selain *Newton Raphson*, karena juga akan mempengaruhi hasil estimasi yang diperoleh.

DAFTAR PUSTAKA

- Agustira, R., Lubis, K. S., & Jamilah. (2013). Kajian Karakteristik Kimia Air, Fisika Air dan Debit Sungai pada Kawasan DAS PADANG Akibat Pembuangan Limbah Tapioka. *Jurnal Online Agroekoteknologi Fakultas Pertanian USU*, 1(3).
- Anselin, L. (1988). *Spatial Econometrics : Methods and Models*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Arianto. (2011). *Pemodelan Prediksi Sebaran Polutan Kali Surabaya Pada Segmen Muara Kali Tengah sampai Pintu Gunungsari*. (Master), Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Badan Lingkungan Hidup. (2013). *Pemantauan Kualitas Air*. Surabaya: Badan Lingkungan Hidup.
- Cameron, A. C., & Triverdi, P. (2005). *Microeconometrics Methods and Application*. New York: Cambridge University Press.
- Casella, G., & Berger, R. L. (2002). *Statistical Inference* (2 ed.): Duxbury.
- Chang, H. (2008). Spatial Analysis Of Water Quality Trends In The Han River Basin, South Korea. *Elsevier*(42).
- Environmental Protection Agency. (2006). *Voluntary Estuary Monitoring Manual Dissolved Oxygen and Biochemical Oxygen Demand*. Washington DC United States.
- Fotheringham, A. S., Brunson, C., & Charlton, M. (2002). *Geographically Weighted Regression*. Chichester England: John Wiley & Sons Ltd.
- Furqon, A. (2013). *Analisis Regresi Weibull untuk Mengetahui Faktor-faktor Yang Mempengaruhi Laju Perbaikan Kondisi Klinis Penderita Stroke (Studi Kasus RSUD Haji Surabaya)* (2009), Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Gujarati, D. N. (2004). *Basic Econometrics* (4 ed.). New York: The McGraw–Hill
- Han, Y. (2006). *Location-Scale Bivariate Weibull Distributions For Bivariate Lifetime Modeling*. (Master of Science), Auburn University, Alabama.

- Hanagal, D. D. (2005). A Bivariate Weibull Regression Model. *Economic Quality Control*, 20(1).
- Hasbi, Y. (2011). *Model Mixed Geographically Weighted Regression Studi Kasus Persentase Rumah Tangga Miskin di Kabupaten Mojokerto Tahun 2008*. (Master), Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Hendrasarie, N., & Cahyarani. (2012). Kemampuan *Self Purification* Kali Surabaya, Ditinjau dari Parameter Organik berdasarkan Model Matematis Kualitas Air. *Teknik Lingkungan UPN Jawa Timur*, 2(1).
- Jaya, R. (2011). *Hubungan Parameter Kualitas Air Dalam Budidaya Ikan Nila (Manajemen Kualitas Air)*. (S1), Universitas Negeri Musamus Merauke, Merauke.
- Khan, S. J. (2010). Quantitative Chemical Exposure Assessment For Water Recycling Schemes (Vol. 27, pp. 159). Australia: National Water Commission
- Khaulasari, H. (2013). *Model Mixed Geographically Weighted Regression Multivariate pada Pencemaran Kualitas Air COD dan BOD di Kali Surabaya*. (S1), Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Kristanto, P. (2002). *Ekologi Industri*. Surabaya: Andi.
- Lumaela, A. K. (2013). *Pemodelan Chemical Oxygen Demand (COD) Sungai di Surabaya dengan Metode Mixed Geographically Weighted Regression*. (S1), Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Nakaya, T., Fotheringham, A. S., Brunsdon, C., & Charlton, M. (2005). Geographically Weighted Poisson Regression for Disease Association Mapping. *Wiley InterScience*, 24, 2695–2717. doi: 10.1002/sim.2129
- Nurdim, F. I. (2008). *Estimasi dan Pengujian Hipotesis Geographically Weighted Regression (Studi Kasus Produktivitas Padi Sawah di Jawa Tmur)*. (Master), Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Ozkan, G., akin, B. a., & ozkan, G. (2013). The Prediction of Chemical Oxygen Demand (COD) or Suspended Solid (SS) Removal Using Statistical Methods and The Artificial Neural Network in the Sugar Industrial Wastewaters. *ARPJ Journal of Engineering and Applied Sciences*, 8(12), 978.

- Peraturan Daerah Kota Surabaya No.2 tentang Pengelolaan Kualitas Air dan Pengendalian Pencemaran Air (2004).
- Peraturan Daerah Kota Surabaya No.2 tentang Penyelenggaraan Ketertiban Umum dan Ketentraman Masyarakat (2014).
- Peraturan Pemerintah Republik Indonesia No.82 tentang Pengelolaan Kualitas Air dan Pengendalian Pencemaran Air (2001).
- Quraisy, A. (2013). *Model Regresi Bivariat Weibul*. (Master), Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Rinne, H. (2009). *The Weibull Distribution A Handbook*. Germany: CRC Press.
- Saefuddin, A., Setiabudi, N. A., & Fitrianto, A. (2012). On Comparison Between Logistic Regression and Geographically Weighted Logistic Regression: with Application to Indonesian Poverty Data. *World Applied Sciences Journal*, 19(2), 205-210. doi: 10.5829/idosi.wasj.2012.19.02.528
- Santoso, F. P. (2012). *Faktor-faktor Eksternal Pneumonia pada Balita di Jawa Timur dengan Pendekatan GWR*. (S1), Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Shin, H., Jung, Y., Jeong, C., & Heo, J.-H. (2011). Assessment Of Modified Anderson–Darling Test Statistics for the Generalized Extreme Value and Generalized Logistic Distributions. *Stoch Environ Res Risk Assess*, Springer-Verlag. doi: 10.1007/s00477-011-0463-y
- Status Lingkungan Hidup Daerah (SLHD) Kota Surabaya (2011).
- Sugiharto. (2005). *Dasar-dasar Pengelolaan Air Limbah*. Jakarta: UI Press.
- Sulistiyani, D. O. (2013). *Analisis terhadap Faktor-faktor yang Mempengaruhi Laju Perbaikan Kondisi Klinis Pasien Penderita Stroke dengan Regresi Cox Weibull*. (S1), Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Undang-Undang Republik Indonesia No.32 tentang Perlindungan dan Pengelolaan Lingkungan Hidup (PPLH) (2009).

DAFTAR LAMPIRAN

	halaman
Lampiran 1. Data COD dan Indikator yang mempengaruhinya.....	85
Lampiran 2. Koordinat Bujur dan Lintang tiap Titik Lokasi Sungai.....	87
Lampiran 3. Statistika Deskriptif dan Uji Multikolinearitas	88
Lampiran 4. Estimasi Parameter Regresi Univariat Weibull.....	89
Lampiran 5. Estimasi Parameter di bawah H_0 Regresi Univariat Weibull.....	97
Lampiran 6. Uji Distribusi pada Data COD	102
Lampiran 7. <i>Syntax</i> Regresi Weibull dengan Program R	103
Lampiran 8. <i>Syntax</i> Regresi Weibull di bawah H_0 dengan Program R	107
Lampiran 9. <i>Syntax</i> Uji Serentak Regresi Weibull dengan Program R	110
Lampiran 10. <i>Syntax</i> Jarak.....	111
Lampiran 11. Output Matrik Jarak <i>Euclidean</i>	112
Lampiran 12. Output Matrik Pembobot <i>Adaptive Bisquare</i>	113
Lampiran 13. <i>Syntax</i> GWUWR dengan Program R	114
Lampiran 14. <i>Syntax</i> GWUWR di bawah H_0 dengan Program R	117
Lampiran 15. <i>Syntax</i> Uji Serentak GWUWR dengan Program R	120
Lampiran 16. Output Hasil Taksiran Parameter $\hat{\beta}(u_i, v_i), \hat{\sigma}(u_i, v_i), \hat{\delta}(u_i, v_i)$ GWUWR	121
Lampiran 17. Output Hasil Z_{hitung} Taksiran Parameter $\hat{\beta}(u_i, v_i)$ GWUWR	122
Lampiran 18. Output Hasil Taksiran Parameter GWUWR di bawah H_0	123
Lampiran 19. Model GWUWR tiap Lokasi Sungai	124
Lampiran 20. Plot Fungsi Distribusi Kumulatif Tiap Lokasi	125
Lampiran 21. Probabilitas Fungsi Distribusi Kumulatif Tiap Lokasi	133

Lampiran 1. Data *Chemical Oxygen Demand* (COD) dan indikator yang mempengaruhinya

Lokasi Sungai	y	x1	x2	x3	x4
Air badan air Kali Surabaya di Kedurus	14,340	15	6,3	1,500	10,73
Air badan air Kali Surabaya di jembatan Wonokromo	10,050	48,5	4,5	2,590	724,38
Air badan air Kalimas di jembatan Ngagel	99,410	20	1,7	2,530	99,00
Air badan air Kalimas di jembatan Keputran Selatan	38,440	16	1,35	2,240	97,68
Air badan air Kalimas di jembatan Kebon Rojo	10,750	12,6	2	2,080	122,99
Air badan air Kali Jeblokan di Petojo	15,090	8	3,2	1,080	2,48
Air badan air Kali Jeblokan di Kedung Cowek	15,120	7	2,35	0,110	0,13
Air badan air Kali Pegirian di Jl. Undaan	10,240	6,3	3,2	1,930	37,39
Air badan air Kali Pegirian di Jl. Pegirian	22,810	6,3	2,5	1,290	3,13
Air badan air Kali Banyu Urip di jembatan Balongsari Tama	25,440	4	2,31	0,130	0,14
Air badan air Kali Greges di jembatan Jl. Dupak	37,170	19,7	1,75	0,910	12,00
Air badan air Kalidami di jembatan Kalidami	51,150	16	1,5	0,700	3,85
Air badan air Kalibokor di jembatan Pucang	15,230	9,5	0,5	0,140	0,10
Air badan air Kali Wonorejo di Jembatan Kedung Baruk	24,910	7,2	0,7	0,340	0,81
Air badan air Kali Kepiting di Jl. Sutorejo	24,190	8	1,81	0,840	5,02
Air badan air Kali Kebon Agung di Rungkut Industri	21,330	6,5	1,65	1,080	3,86
Air badan air Kali Wonokromo di jembatan Merr II	15,510	30	4,2	3,080	693,08
Air badan air saluran Dinoyo di pompa air Dinoyo	46,100	11	0,2	0,960	0,56
Air badan air saluran Darmo di pompa air Darmo	15,150	9,8	0,5	1,390	6,50
Air badan air saluran Kenari di pompa air Kenari	25,020	4,2	1,4	0,830	2,18
Air badan air Bozem Kalidami	20,820	18,5	1	0,120	1,09
Air badan air Bozem Wonorejo	16,040	13	0,5	0,260	1,21
Air badan air bozem Morokrembangan	17,520	45	0,6	1,440	231,44
Air badan air Bozem Kedurus	16,280	65	3,4	2,350	737,83
Air badan air Kali Makmur di Lidah Kulon Jl. Bangkingan	23,100	20	4,2	2,860	1087,61

Lokasi Sungai	y	x1	x2	x3	x4
Air badan air Kali Banyu Urip di pompa air Gunungsari	16,520	5	2,80	1,760	5,76
Air badan air saluran Margomulyo di Jl. Kalianak	15,260	7,5	1,20	0,850	4,64
Air Badan Air Kali Krembangan di Jembatan Jl. Dumar Industri	33,420	8	2,30	1,290	7,94
Air badan air saluran Tambak Wedi di pompa air Tambak Wedi	18,200	6,5	1,20	0,320	2,20
Air badan air saluran Tambak Wedi di Jl. Kenjeran (makam WR Supratman)	30,910	6,8	0,600	0,610	3,32

Keterangan :

y : *Chemical Oxygen Demand (COD)*

x₁ : Lebar sungai

x₂ : Kedalaman sungai

x₃ : Kecepatan air

x₄ : Debit sungai

Lampiran 2. Koordinat bujur dan lintang tiap titik lokasi sungai

Lokasi Sungai	u	v
Air badan air Kali Surabaya di Kedurus	112,4236	7,192187
Air badan air Kali Surabaya di jembatan Wonokromo	112,4415	7,175902
Air badan air Kalimas di jembatan Ngagel	112,443	7,174881
Air badan air Kalimas di jembatan Keputran Selatan	112,4439	7,163831
Air badan air Kalimas di jembatan Kebon Rojo	112,4423	7,143512
Air badan air Kali Jeblokan di Petojo	112,4525	7,154919
Air badan air Kali Jeblokan di Kedung Cowek	112,4612	7,142307
Air badan air Kali Pegirian di Jl. Undaan	112,4437	7,151765
Air badan air Kali Pegirian di Jl. Pegirian	112,4437	7,134064
Air badan air Kali Banyu Urip di jembatan Balongsari Tama	112,4039	7,153081
Air badan air Kali Greges di jembatan Jl. Dupak	112,4338	7,144293
Air badan air Kalidami di jembatan Kalidami	112,4805	7,162604
Air badan air Kalibokor di jembatan Pucang	112,4504	7,171403
Air badan air Kali Wonorejo di Jembatan Kedung Baruk	112,4748	7,183403
Air badan air Kali Kepiting di Jl. Sutorejo	112,4723	7,153928
Air badan air Kali Kebon Agung di Rungkut Industri	112,4551	7,195175
Air badan air Kali Wonokromo di jembatan Merr II	112,465	7,183866
Air badan air saluran Dinoyo di pompa air Dinoyo	112,4437	7,164129
Air badan air saluran Darmo di pompa air Darmo	112,4421	7,172111
Air badan air saluran Kenari di pompa air Kenari	112,4432	7,154048
Air badan air Bozem Kalidami	112,4805	7,162604
Air badan air Bozem Wonorejo	112,4922	7,183686
Air badan air bozem Morokrembangan	112,4385	7,13562
Air badan air Bozem Kedurus	112,4209	7,191867
Air badan air Kali Makmur di Lidah Kulon Jl. Bangkingan	112,3907	7,185373
Air badan air Kali Banyu Urip di pompa air Gunungsari	112,4311	7,18239
Air badan air saluran Margomulyo di Jl. Kalianak	112,4055	7,134718
Air Badan Air Kali Krembangan di Jembatan Jl. Dumar Industri	112,424	7,133908
Air badan air saluran Tambak Wedi di pompa air Tambak Wedi	112,4608	7,122326
Air badan air saluran Tambak Wedi di Jl. Kenjeran (makam WR Supratman)	112,4539	7,143562

Lampiran 3. Statistik Deskriptif dan Uji Multikolinearitas

Descriptive Statistics: y (COD); x1(lebar); x2(kedalaman); x3(kecepatan); ...

Variable	Mean	Variance	Minimum	Maximum
y (COD)	24,85	303,51	10,05	99,41
x1(lebar)	15,36	204,88	4,00	65,00
x2(kedalaman)	2,047	2,056	0,200	6,300
x3(kecepatan)	1,254	0,769	0,110	3,080
x4(debit)	130,3	79757,4	0,1	1087,6

OUTPUT VIF

$x_1 = 2,009$; $x_2 = 1,593$; $x_3 = 2,348$; $x_4 = 3,138$

VIF

$$x_1 = f(x_2, x_3, x_4) ; VIF = \frac{1}{1-0,502} = 2,009$$

$$x_2 = f(x_1, x_3, x_4) ; VIF = \frac{1}{1-0,372} = 1,593$$

$$x_3 = f(x_1, x_2, x_4) ; VIF = \frac{1}{1-0,574} = 2,348$$

$$x_4 = f(x_1, x_2, x_3) ; VIF = \frac{1}{1-0,681} = 3,138$$

Lampiran 4. Estimasi Parameter Regresi Univariat Weibull

1. Mengambil n sampel random y_1, y_2, \dots, y_n

$$f_{kp} = f(y) = \frac{\sigma}{\theta^\sigma} (y - \delta)^{\sigma-1} e^{\left(-\left(\frac{y-\delta}{\theta}\right)^\sigma\right)}$$

$$\text{Misal } \theta = \exp(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k) = \exp(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}) = e^{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}}$$

2. Membuat fungsi *Likelihood*

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \delta | y_1, y_2, \dots, y_n) &= \prod_{i=1}^n f(y_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\sigma}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}\right)^\sigma} (y_i - \delta)^{\sigma-1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}\right)^\sigma\right)} \\ &= \sigma^n \frac{1}{\left(e^{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}\right)^\sigma} \prod_{i=1}^n (y_i - \delta)^{\sigma-1} e^{\left(-\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}\right)^\sigma\right)} \end{aligned}$$

3. Menetapkan logaritma natural dari fungsi likelihood

$$\begin{aligned} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \delta | y_1, y_2, \dots, y_n) &= \ln \left(\frac{\sigma^n}{\left(e^{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}\right)^\sigma} \prod_{i=1}^n (y_i - \delta)^{\sigma-1} e^{\left(-\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}\right)^\sigma\right)} \right) \\ &= \ln \sigma^n - \ln \left(e^{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}} \right)^\sigma + \ln \prod_{i=1}^n (y_i - \delta)^{\sigma-1} + \ln e^{\left(-\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}\right)^\sigma\right)} \\ &= n \ln \sigma - \sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + (\sigma - 1) \sum_{i=1}^n \ln (y_i - \delta) + \left(-\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \right) \end{aligned}$$

4. Mencari turunan parsial pertama

$$\text{a. } \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \delta | y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \left(n \ln \sigma - \sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + (\sigma - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta) - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \right) \right)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \\
&= \frac{\partial \left(n \ln \sigma - \sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \sigma \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta) - \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta) - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{(y_i - \delta)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \right) \right)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \\
&= 0 - \sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i + 0 - 0 - \left(\frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \right)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \right) \\
&= -\sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i - \left(\frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n (y_i - \delta)^\sigma e^{-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \sigma} \right)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \right) \\
&= -\sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i - \left(\sum_{i=1}^n \left((y_i - \delta)^\sigma \frac{\partial (e^{-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \sigma})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \right) \right) \\
&= -\sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i - \left(-\sum_{i=1}^n \left((y_i - \delta)^\sigma \mathbf{x}_i \sigma e^{-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \sigma} \right) \right) \\
&= -\sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^n \left((y_i - \delta)^\sigma \mathbf{x}_i \sigma e^{-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \sigma} \right) \\
&= -\sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \mathbf{x}_i \sigma \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b. } & \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \delta | y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial \sigma} \\
&= \frac{\partial \left(n \ln \sigma - \sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + (\sigma - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta) - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \right) \right)}{\partial \sigma} \\
&= \frac{\partial \left(n \ln \sigma - \sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \sigma \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta) - \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta) - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \right) \right)}{\partial \sigma} \\
&= \frac{n}{\sigma} - \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta) - 0 - \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \ln \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c. } & \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \delta | y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial \delta} \\
&= \frac{\partial \left(n \ln \sigma - \sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + (\sigma - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta) - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \right) \right)}{\partial \delta} \\
&= 0 - 0 + \frac{\partial \left((\sigma - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta) \right)}{\partial \delta} - \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \right)}{\partial \delta} \\
&= \left((\sigma - 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{-1}{y_i - \delta} \right) \right) - \left(\frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n \left((y_i - \delta)^\sigma (e^{-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}})^\sigma \right) \right)}{\partial \delta} \right) \\
&= \left((\sigma - 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{-1}{y_i - \delta} \right) \right) - \left(\sum_{i=1}^n \left((\sigma (y_i - \delta)^{\sigma-1} - 1) (e^{-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}})^\sigma \right) \right) \\
&= -(\sigma - 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i - \delta} \right) + \left(\sum_{i=1}^n \left(\sigma (y_i - \delta)^{\sigma-1} e^{-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \sigma} \right) \right) \\
&= -(\sigma - 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i - \delta} \right) + \sigma \sum_{i=1}^n \left(\frac{(y_i - \delta)^{\sigma-1}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \sigma}} \right)
\end{aligned}$$

5. Mencari turunan parsial kedua

$$\text{a. } \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \left(\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \delta | y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \right)$$

$$= \frac{\partial \left(-\sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \mathbf{x}_i \sigma \right) \right)}{\partial \boldsymbol{\beta}}$$

$$= 0 + \frac{\sum_{i=1}^n \left((y_i - \delta)^\sigma e^{-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \sigma} \mathbf{x}_i \sigma \right)}{\partial \boldsymbol{\beta}}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left((y_i - \delta)^\sigma \mathbf{x}_i \sigma \left(-\mathbf{x}_i^T \sigma e^{-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \sigma} \right) \right)$$

$$= - \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \sigma^2 \right)$$

$$\text{b. } \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \delta | y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \right)$$

$$= \frac{\partial \left(-\sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \mathbf{x}_i \sigma \right) \right)}{\partial \sigma}$$

$$= - \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \ln \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right) \mathbf{x}_i \sigma + \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \mathbf{x}_i \right)$$

Keterangan :

$$\frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \mathbf{x}_i \sigma \right) \right)}{\partial \sigma}$$

$$u' = \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{\partial \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma}{\partial \sigma} = \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \ln \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)$$

$$v' = \frac{\partial v}{\partial \sigma} = \frac{\partial (\mathbf{x}_i \sigma)}{\partial \sigma} = \mathbf{x}_i$$

$$uv = u'v + uv'$$

$$= \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \ln \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right) \mathbf{x}_i \sigma + \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \mathbf{x}_i$$

$$\text{c. } \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \delta | y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \right)$$

$$= \frac{\partial \left(-\sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \mathbf{x}_i \sigma \right) \right)}{\partial \delta} = \frac{\partial \left(-\sigma \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^n \left((y_i - \delta)^\sigma \mathbf{x}_i \sigma e^{-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \sigma} \right) \right)}{\partial \delta}$$

$$= 0 + \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{x}_i \sigma e^{-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \sigma} \sigma (y_i - \delta)^{\sigma-1} - 1 \right)$$

$$= - \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{x}_i \sigma e^{-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \sigma} \sigma (y_i - \delta)^{\sigma-1} \right)$$

$$\text{d. } \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \delta | y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial \sigma} \right)$$

$$= \frac{\partial \left(\frac{n}{\sigma} - \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta) - \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \ln \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right) \right) \right)}{\partial \sigma}$$

$$= -\frac{n}{\sigma^2} - 0 + 0 - \sum_{i=1}^n \left(\ln \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right) \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \ln \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right) \right)$$

$$= -\frac{n}{\sigma^2} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \left(\ln \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right) \right)^2$$

$$= -\frac{n}{\sigma^2} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \ln^2 \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)$$

$$\text{e. } \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \delta | y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial \sigma} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial \left(\frac{n}{\sigma} - \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta) - \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{(y_i - \delta)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \ln \left(\frac{(y_i - \delta)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right) \right) \right)}{\partial \delta} \\
&= 0 - 0 + \sum_{i=1}^n \frac{-1}{(y_i - \delta)} - \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\sigma}{(y_i - \delta)} \left(\frac{(y_i - \delta)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \ln \left(\frac{(y_i - \delta)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right) - \left(\frac{(y_i - \delta)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \frac{1}{(y_i - \delta)} \right) \\
&= -\sum_{i=1}^n \frac{1}{(y_i - \delta)} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma}{(y_i - \delta)} \left(\frac{(y_i - \delta)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \ln \left(\frac{(y_i - \delta)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right) + \left(\frac{(y_i - \delta)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \frac{1}{(y_i - \delta)} \right)
\end{aligned}$$

Keterangan :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{(y_i - \delta)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \ln \left(\frac{(y_i - \delta)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right) \right)}{\partial \delta} \\
&u' = \frac{\partial u}{\partial \delta} \\
&= \frac{\partial \left(\frac{(y_i - \delta)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma}{\partial \delta} = \frac{\partial \left((y_i - \delta)^\sigma e^{-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \sigma} \right)}{\partial \delta} \\
&= \left(\sigma (y_i - \delta)^{\sigma-1} - 1 \right) e^{-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \sigma} \\
&= -\frac{\sigma}{(y_i - \delta)} \left(\frac{(y_i - \delta)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \\
&v' = \frac{\partial v}{\partial \delta} \\
&= \frac{\partial \left(\ln \left(\frac{(y_i - \delta)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right) \right)}{\partial \delta} = \frac{\partial \left((\ln y_i - \delta) - (\ln e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}) \right)}{\partial \delta} \\
&= \frac{-1}{(y_i - \delta)} - 0 = -\frac{1}{(y_i - \delta)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
uv &= u'v + uv' \\
&= \left(\left(-\frac{\sigma}{(y_i - \delta)} \right) \left(\frac{(y_i - \delta)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \ln \left(\frac{(y_i - \delta)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right) \right) + \left(\left(\frac{(y_i - \delta)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma - \frac{1}{(y_i - \delta)} \right) \\
&= \left(\left(-\frac{\sigma}{(y_i - \delta)} \right) \left(\frac{(y_i - \delta)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \ln \left(\frac{(y_i - \delta)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right) \right) - \left(\left(\frac{(y_i - \delta)}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \left(\frac{1}{(y_i - \delta)} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{f. } \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \delta | y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial \delta} \right) \\
&= \frac{\partial \left(-(\sigma-1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i - \delta} \right) + \sigma \sum_{i=1}^n \left(\frac{(y_i - \delta)^{\sigma-1}}{(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}})^{\sigma}} \right) \right)}{\partial \sigma} \\
&= \frac{\partial \left(\frac{-\sigma}{\sum_{i=1}^n (y_i - \delta)} + \frac{1}{\sum_{i=1}^n (y_i - \delta)} \right)}{\partial \sigma} + \frac{\partial \left(\sigma \sum_{i=1}^n \left(\frac{(y_i - \delta)^{\sigma-1}}{(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}})^{\sigma}} \right) \right)}{\partial \sigma} \\
&= -\frac{1}{\sum_{i=1}^n (y_i - \delta)} + \frac{\partial \left(\sigma \sum_{i=1}^n \left(\frac{(y_i - \delta)^{\sigma}}{(y_i - \delta)(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}})^{\sigma}} \right) \right)}{\partial \sigma} \\
&= -\frac{1}{\sum_{i=1}^n (y_i - \delta)} + \frac{\partial \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma}{(y_i - \delta)} \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^{\sigma} \right)}{\partial \sigma} \\
&= -\frac{1}{\sum_{i=1}^n (y_i - \delta)} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{(y_i - \delta)} \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^{\sigma} + \frac{\sigma}{(y_i - \delta)} \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^{\sigma} \ln \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right) \right)
\end{aligned}$$

Keterangan :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \left(\frac{\sigma}{(y_i - \delta)} \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^{\sigma} \right)}{\partial \sigma} \\
u' &= \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{\partial \left(\frac{\sigma}{(y_i - \delta)} \right)}{\partial \sigma} = \frac{1}{(y_i - \delta)} \\
v' &= \frac{\partial v}{\partial \sigma} = \frac{\partial \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^{\sigma}}{\partial \sigma} = \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^{\sigma} \ln \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
uv &= u'v + uv' \\
&= \frac{1}{(y_i - \delta)} \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma + \frac{\sigma}{(y_i - \delta)} \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right)^\sigma \ln \left(\frac{y_i - \delta}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}} \right) \\
&\mathbf{g} \cdot \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \delta | y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial \delta} \right) \\
&= \frac{\partial \left(-(\sigma - 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i - \delta} \right) + \sigma \sum_{i=1}^n \left((y_i - \delta)^{\sigma-1} \left(e^{-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}} \right)^\sigma \right) \right)}{\partial \delta} \\
&= \frac{\partial \left(-(\sigma - 1) \sum_{i=1}^n (y_i - \delta)^{-1} + \sigma \sum_{i=1}^n \left((y_i - \delta)^{\sigma-1} \left(e^{-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}} \right)^\sigma \right) \right)}{\partial \delta} \\
&= \left(-(\sigma - 1) \sum_{i=1}^n -(y_i - \delta)^{-2} (-1) \right) + \sigma \sum_{i=1}^n \left((\sigma - 1) (y_i - \delta)^{\sigma-2} (-1) \left(e^{-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}} \right)^\sigma \right) \\
&= -(\sigma - 1) \sum_{i=1}^n (y_i - \delta)^{-2} - \sigma \sum_{i=1}^n \left((\sigma - 1) (y_i - \delta)^{\sigma-2} \left(e^{-\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}} \right)^\sigma \right) \\
&= -(\sigma - 1) \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n (y_i - \delta)^2} + \sigma \sum_{i=1}^n \left(\frac{(y_i - \delta)^{\sigma-2}}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}} \right)^\sigma} \right) \right)
\end{aligned}$$

Lampiran 5. Estimasi Parameter di bawah H_0 Regresi Univariat Weibull

$$\bullet L(\omega) = \prod_{i=1}^n \frac{\sigma_{\omega}}{(e^{\beta_0})^{\sigma_{\omega}}} (y_i - \delta_{\omega})^{\sigma_{\omega}-1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta_{\omega}}{e^{\beta_0}}\right)^{\sigma_{\omega}}\right)} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \bullet \ln L(\omega) &= \ln \left(\prod_{i=1}^n \frac{\sigma_{\omega}}{(e^{\beta_0})^{\sigma_{\omega}}} (y_i - \delta_{\omega})^{\sigma_{\omega}-1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta_{\omega}}{e^{\beta_0}}\right)^{\sigma_{\omega}}\right)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{\sigma_{\omega}}{(e^{\beta_0})^{\sigma_{\omega}}} (y_i - \delta_{\omega})^{\sigma_{\omega}-1} e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta_{\omega}}{e^{\beta_0}}\right)^{\sigma_{\omega}}\right)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \sigma_{\omega} - \sum_{i=1}^n \ln (e^{\beta_0})^{\sigma_{\omega}} + \sum_{i=1}^n \ln (y_i - \delta_{\omega})^{\sigma_{\omega}-1} + \sum_{i=1}^n \ln e^{\left(-\left(\frac{y_i - \delta_{\omega}}{e^{\beta_0}}\right)^{\sigma_{\omega}}\right)} \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \sigma_{\omega} - \sum_{i=1}^n \beta_0 \sigma_{\omega} + (\sigma_{\omega} - 1) \sum_{i=1}^n \ln (y_i - \delta_{\omega}) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta_{\omega}}{e^{\beta_0}} \right)^{\sigma_{\omega}} \\ &= n \ln \sigma_{\omega} - n \beta_0 \sigma_{\omega} + (\sigma_{\omega} - 1) \sum_{i=1}^n \ln (y_i - \delta_{\omega}) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta_{\omega}}{e^{\beta_0}} \right)^{\sigma_{\omega}} \\ \bullet \frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \beta_0} &= \frac{\partial \left(n \ln \sigma_{\omega} - n \beta_0 \sigma_{\omega} + (\sigma_{\omega} - 1) \sum_{i=1}^n \ln (y_i - \delta_{\omega}) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta_{\omega}}{e^{\beta_0}} \right)^{\sigma_{\omega}} \right)}{\partial \beta_0} \\ &= 0 - n \sigma_{\omega} + 0 - \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta_{\omega}}{e^{\beta_0}} \right)^{\sigma_{\omega}} \right)}{\partial \beta_0} \\ &= 0 - n \sigma_{\omega} + 0 - \frac{\partial \left(e^{-\beta_0 \sigma_{\omega}} \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_{\omega})^{\sigma_{\omega}} \right)}{\partial \beta_0} \\ &= -n \sigma_{\omega} - \left(e^{-\beta_0 \sigma_{\omega}} (-\sigma_{\omega}) \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_{\omega})^{\sigma_{\omega}} \right) \\ &= -n \sigma_{\omega} + e^{-\beta_0 \sigma_{\omega}} \sigma_{\omega} \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_{\omega})^{\sigma_{\omega}} \quad (4.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \sigma_\omega} &= \frac{\partial \left(n \ln \sigma_\omega - n \beta_0 \sigma_\omega + (\sigma_\omega - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta_\omega) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta_\omega}{e^{\beta_0}} \right)^{\sigma_\omega} \right)}{\partial \sigma_\omega} \\
&= \frac{n}{\sigma_\omega} - n \beta_0 + \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta_\omega) - \frac{\partial \left(e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \right)}{\partial \sigma_\omega} \\
&= \frac{n}{\sigma_\omega} - n \beta_0 + \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta_\omega) + e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \beta_0 \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \\
&\quad - e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \ln(y_i - \delta_\omega)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Keterangan :

$$y = a^{f(x)} \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial x} = a^{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x} \ln(a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma_\omega} = \frac{\partial \left(e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \right)}{\partial \sigma_\omega} = e^{-\beta_0 \sigma_\omega} (-\beta_0)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma_\omega} = \frac{\partial \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega}}{\partial \sigma_\omega} = \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \cdot 1 \cdot \ln(y_i - \delta_\omega)$$

$$uv = u'v + uv'$$

$$= -e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \beta_0 \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} + e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \ln(y_i - \delta_\omega)$$

$$\begin{aligned}
\bullet \frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \delta_\omega} &= \frac{\partial \left(n \ln \sigma_\omega - n \beta_0 \sigma_\omega + (\sigma_\omega - 1) \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta_\omega) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \delta_\omega}{e^{\beta_0}} \right)^{\sigma_\omega} \right)}{\partial \delta_\omega} \\
&= 0 - 0 - (\sigma_\omega - 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i - \delta_\omega} \right) - \frac{\partial \left(e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \right)}{\partial \delta_\omega} \\
&= -(\sigma_\omega - 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i - \delta_\omega} \right) - \left(e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sigma_\omega \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega - 1} \cdot (-1) \right) \\
&= -(\sigma_\omega - 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i - \delta_\omega} \right) + e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sigma_\omega \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega - 1}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \frac{\partial}{\partial \beta_0} \left(\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \beta_0} \right) = \frac{\partial \left(-n\sigma_\omega + e^{-\beta_0\sigma_\omega} \sigma_\omega \sum_{i=1}^n \left((y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \right) \right)}{\partial \beta_0} \\
& = 0 + \left(e^{-\beta_0\sigma_\omega} (-\sigma_\omega) \sigma_\omega \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \right) = -e^{-\beta_0\sigma_\omega} \sigma_\omega^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \\
& \bullet \frac{\partial}{\partial \sigma_\omega} \left(\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \beta_0} \right) = \frac{\partial \left(-n\sigma_\omega + e^{-\beta_0\sigma_\omega} \sigma_\omega \sum_{i=1}^n \left((y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \right) \right)}{\partial \sigma_\omega} \\
& = -n + e^{-\beta_0\sigma_\omega} \sigma_\omega \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \ln(y_i - \delta_\omega) + e^{-\beta_0\sigma_\omega} \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} - e^{-\beta_0\sigma_\omega} \beta_0 \sigma_\omega \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \\
& u' = \frac{\partial u}{\partial \sigma_\omega} = \frac{\partial (e^{-\beta_0\sigma_\omega})}{\partial \sigma_\omega} = e^{-\beta_0\sigma_\omega} (-\beta_0) \\
& v' = \frac{\partial v}{\partial \sigma_\omega} = \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial \sigma_\omega} = 1 \\
& w' = \frac{\partial w}{\partial \sigma_\omega} = \frac{\partial \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega}}{\partial \sigma_\omega} = \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \cdot 1 \cdot \ln(y_i - \delta_\omega) \\
& uvw = (uv) \frac{\partial w}{\partial \sigma_\omega} + (uw) \frac{\partial v}{\partial \sigma_\omega} + (vw) \frac{\partial u}{\partial \sigma_\omega} \\
& = e^{-\beta_0\sigma_\omega} \sigma_\omega \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \ln(y_i - \delta_\omega) + e^{-\beta_0\sigma_\omega} \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \cdot 1 - \sigma_\omega \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} e^{-\beta_0\sigma_\omega} \beta_0 \\
& = e^{-\beta_0\sigma_\omega} \sigma_\omega \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \ln(y_i - \delta_\omega) + e^{-\beta_0\sigma_\omega} \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} - e^{-\beta_0\sigma_\omega} \beta_0 \sigma_\omega \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \\
& \bullet \frac{\partial}{\partial \delta_\omega} \left(\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \beta_0} \right) = \frac{\partial \left(-n\sigma_\omega + e^{-\beta_0\sigma_\omega} \sigma_\omega \sum_{i=1}^n \left((y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \right) \right)}{\partial \delta_\omega} \\
& = 0 + e^{-\beta_0\sigma_\omega} \sigma_\omega \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \cdot (-1) = -e^{-\beta_0\sigma_\omega} \sigma_\omega^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \left(\frac{n}{\sigma_\omega} - n\beta_0 + \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta_\omega) + e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \beta_0 \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \right)}{\partial \sigma_\omega} \\
& \bullet \frac{\partial}{\partial \sigma_\omega} \left(\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \sigma_\omega} \right) = \frac{-e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \ln(y_i - \delta_\omega)}{\partial \sigma_\omega} \\
& = -n\sigma_\omega^{-2} - 0 + 0 - e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \beta_0^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} + e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \beta_0 \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \ln(y_i - \delta_\omega) \\
& + e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \beta_0 \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \ln(y_i - \delta_\omega) - e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} (\ln(y_i - \delta_\omega))^2 \\
& u' = \frac{\partial u}{\partial \sigma_\omega} = \frac{\partial (e^{-\beta_0 \sigma_\omega}) \beta_0}{\partial \sigma_\omega} = e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \beta_0^2 \\
& v' = \frac{\partial v}{\partial \sigma_\omega} = \frac{\partial \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega}}{\partial \sigma_\omega} = \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \cdot 1 \cdot \ln(y_i - \delta_\omega) \\
& uv = u'v + uv' \\
& = -e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \beta_0^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} + e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \beta_0 \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \ln(y_i - \delta_\omega) \\
& u' = \frac{\partial u}{\partial \sigma_\omega} = \frac{\partial \left(-e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta_\omega) \right)}{\partial \sigma_\omega} = -e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \cdot (-\beta_0) \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta_\omega) \\
& v' = \frac{\partial v}{\partial \sigma_\omega} = \frac{\partial \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega}}{\partial \sigma_\omega} = \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \cdot 1 \cdot \ln(y_i - \delta_\omega) \\
& uv = u'v + uv' \\
& = -e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \beta_0 \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta_\omega) (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} + \left(-e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta_\omega) (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \ln(y_i - \delta_\omega) \right) \\
& = -e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \beta_0 \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega) \ln(y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} - e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} (\ln(y_i - \delta_\omega))^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \partial \left(\frac{n}{\sigma_\omega} - n\beta_0 + \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta_\omega) + e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \beta_0 \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \right. \\
& \bullet \left. \frac{\partial}{\partial \delta_\omega} \left(\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \sigma_\omega} \right) = \frac{-e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \ln(y_i - \delta_\omega)}{\partial \delta_\omega} \right) \\
& = 0 - 0 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i - \delta_\omega} \right) - \left(e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \beta_0 \sigma_\omega \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega - 1} \right) \\
& + e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sigma_\omega \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega - 1} \ln(y_i - \delta_\omega) + e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \left(\frac{1}{y_i - \delta_\omega} \right) \\
& u' = \frac{\partial u}{\partial \delta_\omega} = \frac{\partial \left(-e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \right)}{\partial \delta_\omega} \\
& = -e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sigma_\omega \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega - 1} \cdot (-1) = -e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sigma_\omega \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega - 1} \\
& v' = \frac{\partial v}{\partial \delta_\omega} = \frac{\partial \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \delta_\omega)}{\partial \delta_\omega} = -\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i - \delta_\omega} \right) \\
& uv = u'v + uv' \\
& = e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sigma_\omega \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega - 1} \ln(y_i - \delta_\omega) + e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega} \left(\frac{1}{y_i - \delta_\omega} \right) \\
& \bullet \frac{\partial}{\partial \delta_\omega} \left(\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \delta_\omega} \right) = \frac{\partial \left(-(\sigma_\omega - 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i - \delta_\omega} \right) + e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sigma_\omega \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega - 1} \right)}{\partial \delta_\omega} \\
& = \frac{\partial \left(-(\sigma_\omega - 1) \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{-1} + e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sigma_\omega \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega - 1} \right)}{\partial \delta_\omega} \\
& = -(\sigma_\omega - 1) \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{-2} + \left(e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sigma_\omega (\sigma_\omega - 1) \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega - 2} \cdot (-1) \right) \\
& = -(\sigma_\omega - 1) \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{-2} - e^{-\beta_0 \sigma_\omega} \sigma_\omega (\sigma_\omega - 1) \sum_{i=1}^n (y_i - \delta_\omega)^{\sigma_\omega - 2}
\end{aligned}$$

Lampiran 6. Uji Distribusi pada data COD

Goodness of Fit Test

Distribution	AD	P	LRT P
Normal	2,692	<0,005	
Lognormal	0,714	0,056	
Exponential	4,008	<0,003	
Weibull	1,718	<0,010	
3-Parameter Weibull	0,621	0,110	0,000
Smallest Extreme Value	4,766	<0,010	
Largest Extreme Value	1,019	<0,010	
Gamma	1,196	<0,005	
Logistic	1,493	<0,005	
Loglogistic	0,563	0,097	

ML Estimates of Distribution Parameters

Distribution	Location	Shape	Scale	Threshold
Normal*	24,85067		17,42144	
Lognormal*	3,06447		0,50948	
Exponential			24,85067	
Weibull		1,65410	28,10366	
3-Parameter Weibull		1,04491	15,69809	9,45492
Smallest Extreme Value	35,26930		27,35615	
Largest Extreme Value	18,73364		8,84512	
Gamma		3,52695	7,04593	
Logistic	21,82406		7,33913	
Loglogistic	3,01721		0,27423	

Lampiran 7. Syntax Regresi Weibull dengan Program R

```
dataaa=read.table("D:\\tesisput          fix\\COD
FIX\\cod.txt",header=TRUE)
library(corpcor)

WR1<-function(dataaa,sigma,delta)
{
  n=length(dataaa[,1])
  m=length(dataaa[,2])
  satuan=rep(1,n)
  x=as.matrix(cbind(satuan,dataaa[,2:m]))
  y=as.matrix(dataaa[,1])
  tx=as.matrix(t(x))
  epsilon=1000
  bta=(pseudoinverse(tx%*%x))%*%(tx%*%y)
  pawal=c(bta,sigma,delta)
  cat("nilai awal",pawal,"\n")
  iterasi=1
  while(epsilon>0.0001)
  {

    k1=rep(NA,n)
    k2=rep(NA,n)
    k3=rep(NA,n)
    k4=rep(NA,n)
    a1=matrix(NA,n,5)
    b1=rep(NA,n)
    c1=rep(NA,n)
    ahl=matrix(NA,5,5)
    aahl=matrix(0,5,5)
    h1l=rep(NA,n)
    ah4=matrix(NA,n,5)
    ah7=matrix(NA,n,5)
    ah5=rep(NA,n)
    ah6=rep(NA,n)
    ah9=rep(NA,n)
    ybar=mean(y)
    for (i in 1:n)
    {
      xt=as.matrix(x[i,])
      xtx=t(xt)
      k1[i]=y[i]-delta
      k2[i]=exp(xtx%*%bta)
      k3[i]=(y[i]-k2[i])^2
      k4[i]=(y[i]-ybar)^2
```

Lampiran 7. Syntax Regresi Weibull dengan Program R (lanjutan)

```
a1[i,]=(-sigma*xt)+(((k1[i]/k2[i])^sigma)*xt*sigma)
b1[i]=(1/sigma)-(xtx%%bta)+(log(k1[i]))-
(((k1[i]/k2[i])^sigma)*(log(k1[i]/k2[i]))))
c1[i]=-((sigma-1)*(1/k1[i]))+sigma*((k1[i]^(sigma-
1))/(k2[i]^sigma))
ahl=-(xtx%%xtx)*(sigma^2)
aahl=aahl+ahl
h11[i]=(k1[i]/k2[i])^sigma
ah4[i,]=(-
xt)+(((k1[i]/k2[i])^sigma)*(log(k1[i]/k2[i]))*(xt*sigma))+xt*
((k1[i]/k2[i])^sigma))
ah7[i,]=-(xt*sigma*k2[i]^(-sigma))*(sigma*(k1[i]^(sigma-1)))
ah5[i]=(-1/(sigma^2))-
((k1[i]/k2[i])^sigma)*((log(k1[i]/k2[i]))^2)
ah6[i]=-
(1/k1[i])+(sigma*((k1[i]/k2[i])^sigma)/(k1[i]))*(log(k1[i]/k2[
i]))+(((k1[i]/k2[i])^sig
ma)/k1[i])
ah9[i]=-((sigma-1)*((1/(k1[i]^2))+sigma*((k1[i])^(sigma-
2))/(k2[i]^sigma))
}
a=rep(NA,5)
h4=rep(NA,5)
h7=rep(NA,5)
b=sum(b1)
c=sum(c1)
h1=aahl*sum(h11)
h5=sum(ah5)
h6=sum(ah6)
h9=sum(ah9)

g=c(a,b,c)
h2=t(h4)
h3=t(h7)
h8=t(h6)
hh1=cbind(h1,h4,h7)
hh2=cbind(h2,h5,h8)
hh3=cbind(h3,h6,h9)
h=rbind(hh1,hh2,hh3)
```

Lampiran 7. Syntax Regresi Weibull dengan Program R (lanjutan)

```
#konvergensi
pakhir=pawal-(pseudoinverse(h)**%g)
bta=pakhir[1:5]

sigma1=abs(pakhir[6])
if (sigma1>10) sigma=runif(1,0,10)
else sigma=abs(pakhir[6])

miny=min(y)
delta1=abs(pakhir[7])
if (delta1>miny) delta=runif(1,0,miny)
else delta=abs(pakhir[7])

pakhir=c(bta,sigma,delta)
error=abs(pakhir-pawal)
epsilon=sqrt(sum(error^2))

pawal=c(bta,sigma,delta)
iterasi=iterasi+1

}
pakhir=pawal
bta=pakhir[1:5]
sigma=pakhir[6]
delta=pakhir[7]
cat("nilai akhir :",pawal,"\n")
cat("norm :",epsilon,"\n")

#uji parsial
var=-(pseudoinverse(h1))
varb=diag(var)
seb=sqrt(varb)
zhit=bta/seb
zhitabs=abs(zhit)
for (i in 1:5)
{
  if((zhitabs[i])>1.64) cat("b[",(i-1),"] signifikan atau
tolak H0","\n") else cat("b[",(i-1),"] tidak signifikan atau
gagal tolak H0","\n")
}
```

Lampiran 7. Syntax Regresi Weibull dengan Program R (lanjutan)

```
cat("iterasi",iterasi,"\n")
  list(bta=bta,sigma=sigma,delta=delta,zhit=zhit)
}

> WR1(dataa,1.04491,9.45492)
nilai awal 22.51007 0.02951466 -4.824818 11.81811 -
0.02341339 1.04491 9.45492
nilai akhir : 2.920988 -0.01004455 -0.3629349 0.5638271 -
0.0007444984 1.183737 9.919254
norm : 9.984584e-05
b[ 0 ] signifikan atau tolak H0
b[ 1 ] signifikan atau tolak H0
b[ 2 ] signifikan atau tolak H0
b[ 3 ] signifikan atau tolak H0
b[ 4 ] signifikan atau tolak H0
iterasi 335
$bta
[1] 2.9209875615 -0.0100445529 -0.3629348699 0.5638270594
[5] -0.0007444984

$sigma
[1] 1.183737

$delta
[1] 9.919254

$zhit
[1] 42.357286 -3.537650 -14.376922 11.253395 -4.139038
```


Lampiran 8. Syntax Regresi Weibull di bawah H_0 dengan Program R

```
dataaa=read.table("D:\\tesisput          fix\\COD
FIX\\cod.txt",header=TRUE)
library(corpcor)

WR0<-function(dataaa,bta,sigma,delta)
{
  n=length(dataaa[,1])
  m=length(dataaa[1,])
  x=as.matrix(rep(1,n))
  y=as.matrix(dataaa[,1])
  epsilon=1000
  pawal=c(bta,sigma,delta)
  cat("nilai awal",pawal,"\n")
  iterasi=1
  while(epsilon>0.0001)
  {

    k1=rep(NA,n)
    k3=rep(NA,n)
    a1=rep(NA,n)
    b1=rep(NA,n)
    c1=rep(NA,n)
    ah1=rep(NA,n)
    ah7=rep(NA,n)
    ah4=rep(NA,n)
    ah5=rep(NA,n)
    ah8=rep(NA,n)
    ah9=rep(NA,n)

    for (i in 1:n)
    {
      a1[i]=-sigma+((k3*sigma)*(k1[i]^sigma))
      b1[i]=(1/sigma)-
(bta)+(log(k1[i]))+((k3)*bta*(k1[i]^sigma))-
((k3)*(k1[i]^sigma)*(log(k1[i]))))
      c1[i]=-(sigma-1)*(1/k1[i])+(k3*sigma*(k1[i]^(sigma-
1)))
      ah1[i]=-(k3*(sigma^2)*(k1[i]^sigma))
```

**Lampiran 8. Syntax Regresi Weibull di bawah H_0 dengan Program R
(lanjutan)**

```
ah4[i]=-
1+(k3*sigma*(k1[i]^sigma)*log(k1[i]))+(k3*(k1[i]^sigma))-
(k3*bta*sigma*(k1[i]^sigma))
ah7[i]=-(k3*(sigma^2)*(k1[i])^(sigma-1))
ah5[i]=-(1/(sigma^2))-
(k3*(bta^2)*(k1[i]^sigma))+(k3*bta*(k1[i]^sigma)*(log(k1[
i])))+(k3*bta*(k1[i]^sigma)*(log(k1[i])))-
(k3*(k1[i]^sigma)*(log(k1[i]))^2)
ah8[i]=-(1/k1[i])-(k3*bta*sigma*((k1[i])^(sigma-
1)))+(k3*sigma*(k1[i]^(sigma-
1)*log(k1[i])))+(k3*(k1[i]^sigma)*(1/k1[i]))
ah9[i]=-(sigma-1)*((1/k1[i]^2)-((k3*sigma*(sigma-
1)*k1[i]^(sigma-2))))
}
a=sum(a1)
b=sum(b1)
c=sum(c1)
h1=sum(ah1)
h4=sum(ah4)
h7=sum(ah7)
h5=sum(ah5)
h8=sum(ah8)
h9=sum(ah9)
g=c(a,b,c)
h2=t(h4)
h3=t(h7)
h6=t(h8)
hh1=cbind(h1,h4,h7)
hh2=cbind(h2,h5,h8)
hh3=cbind(h3,h6,h9)
h=rbind(hh1,hh2,hh3)
```

Lampiran 8. Syntax Regresi Weibull di bawah H_0 dengan Program R (lanjutan)

```
#konvergensi
  pakhir=pawal-(pseudoinverse(h)%*%g)

  meany=mean(y)
  btal=abs(pakhir[1])
  if (btal>200) bta=runif(1,0,200)
  else bta=abs(pakhir[1])

  sigma1=abs(pakhir[2])
  if (sigma1>10) sigma=1.184
  else sigma=abs(pakhir[2])

  miny=min(y)
  delta1=abs(pakhir[3])
  if (delta1>miny) delta=9.919
  else delta=abs(pakhir[3])

  pakhir=c(bta,sigma,delta)
  error=abs(pakhir-pawal)
  epsilon=sqrt(sum(error^2))

  pawal=c(bta,sigma,delta)
  iterasi=iterasi+1

}

pakhir=pawal
bta=pakhir[1]
sigma=pakhir[2]
delta=pakhir[3]
cat("nilai akhir :",pawal,"\n")
cat("norm :",epsilon,"\n")
cat("iterasi",iterasi,"\n")
list(bta=bta,sigma=sigma,delta=delta)
}
```

Lampiran 9. Syntax Uji Serentak Regresi Weibull dengan Program R

```
dataa=read.table("D:\\tesisput          fix\\COD
FIX\\cod.txt",header=TRUE)
library(corpcor)

ujisig<-function(dataa)
{
n=length(dataa[,1])
m=length(dataa[1,])
satuan=rep(1,n)
x=as.matrix(cbind(satuan,dataa[,2:m]))
y=as.matrix(dataa[,1])
bta0=3.468514
sigma=1.971393
delta=3.219011
bta1=c(2.921,-0.01,-0.363,0.564,-0.0007)
sigma1=1.184
delta1=9.919

lregresb0=1
lregresb=1
for (i in 1:n)
{
xt=as.matrix(x[i,])
xtx=t(xt)
lregresb0=((sigma/(exp(bta0)^sigma))*((y[i]-
delta)^(sigma-1))*(exp(-(y[i]-
delta)/(exp(bta0))^sigma)))*lregresb0
lregresb=((sigma1/((exp(xtx%%bta1))^sigma1))*((y[i]-
delta1)^(sigma1-1))*(exp(-(y[i]-
delta1)/(exp(xtx%%bta1))^sigma1)))*lregresb
}

G=-2*log(lregresb0/lregresb)
print(G)
}
ujisig(dataa)

#output
      [,1]
[1,] 32.21527
```

Lampiran 10. Syntax Jarak

```
# Jarak
data=read.table("D:\\tesisput fix\\COD
FIX\\datacod.txt",header=TRUE)
u=data[,6]
u=as.matrix(u)
i=nrow(u)
v=data[,7]
v=as.matrix(v)
j=nrow(v)
library(fields)
jarak=matrix(nrow=30,ncol=30)
for(i in 1:30)
  for(j in 1:30)
    jarak[i,j]=sqrt((u[i,]-u[j,])^2+(v[i,]-v[j,])^2)
write.table(jarak,file="D:/tesisput fix/COD
FIX/jarakcod.csv",sep=",")
```

Lampiran 11. Output Matrik Jarak Euclidean

Lokasi	1	2	3	...	29	30
1	0,00000	0,02423	0,02603	...	0,07916	0,05727
2	0,02423	0,00000	0,00181	...	0,05694	0,03460
3	0,02603	0,00181	0,00000	...	0,05548	0,03313
4	0,03486	0,01229	0,01108	...	0,04484	0,02259
5	0,05213	0,03240	0,03138	...	0,02817	0,01159
6	0,04717	0,02368	0,02210	...	0,03364	0,01143
7	0,06249	0,03894	0,03731	...	0,01999	0,00750
8	0,04514	0,02423	0,02313	...	0,03406	0,01305
9	0,06148	0,04189	0,04082	...	0,02081	0,01394
10	0,04380	0,04405	0,04483	...	0,06473	0,05088
11	0,04896	0,03255	0,03196	...	0,03486	0,02009
12	0,06411	0,04114	0,03940	...	0,04482	0,03274
13	0,03388	0,00989	0,00810	...	0,05018	0,02806
14	0,05195	0,03409	0,03288	...	0,06265	0,04501
15	0,06192	0,03778	0,03597	...	0,03361	0,02114
16	0,03163	0,02355	0,02360	...	0,07308	0,05163
17	0,04218	0,02473	0,02368	...	0,06168	0,04181
18	0,03450	0,01196	0,01077	...	0,04519	0,02295
19	0,02733	0,00384	0,00291	...	0,05318	0,03086
20	0,04288	0,02192	0,02083	...	0,03629	0,01495
21	0,06411	0,04114	0,03940	...	0,04482	0,03274
22	0,06913	0,05126	0,04995	...	0,06892	0,05551
23	0,05849	0,04040	0,03952	...	0,02600	0,01729
24	0,00270	0,02608	0,02789	...	0,08018	0,05846
25	0,03358	0,05170	0,05337	...	0,09429	0,07572
26	0,01235	0,01228	0,01409	...	0,06701	0,04499
27	0,06025	0,05474	0,05498	...	0,05671	0,04916
28	0,05828	0,04552	0,04520	...	0,03864	0,03140
29	0,07916	0,05694	0,05548	...	0,00000	0,02235
30	0,05727	0,03460	0,03313	...	0,02235	0,00000

Lampiran 12. Output Matrik Pembobot Adaptif Bisquare

Lokasi	1	2	3	4	...	29	30
1	1	0,998157	0,997874	0,99619	...	0,980425	0,989732
2	0,998157	1	0,99999	0,999526	...	0,989848	0,996245
3	0,997874	0,99999	1	0,999615	...	0,99036	0,996557
4	0,99619	0,999526	0,999615	1	...	0,993699	0,998398
5	0,991487	0,996708	0,996912	0,998696	...	0,997511	0,999579
6	0,993026	0,99824	0,998468	0,999516	...	0,996452	0,99959
7	0,98778	0,995245	0,995635	0,9976	...	0,998747	0,999824
8	0,993613	0,998157	0,998322	0,999543	...	0,996361	0,999465
9	0,988168	0,994499	0,994776	0,99722	...	0,998641	0,99939
10	0,993987	0,993919	0,993702	0,994622	...	0,98689	0,991891
11	0,992489	0,996677	0,996795	0,998482	...	0,99619	0,998733
12	0,987138	0,994693	0,995133	0,995792	...	0,993705	0,996638
13	0,9964	0,999693	0,999794	0,999688	...	0,99211	0,99753
14	0,991547	0,996355	0,996609	0,995799	...	0,987715	0,99365
15	0,988002	0,995524	0,995943	0,997161	...	0,996457	0,998597
16	0,996862	0,998259	0,998253	0,996524	...	0,983307	0,99165
17	0,994422	0,998082	0,998241	0,997347	...	0,988094	0,994521
18	0,996267	0,999551	0,999636	1	...	0,993601	0,998348
19	0,997657	0,999954	0,999973	0,999775	...	0,991143	0,997013
20	0,994237	0,998493	0,998638	0,999698	...	0,995869	0,999299
21	0,987138	0,994693	0,995133	0,995792	...	0,993705	0,996638
22	0,985053	0,991769	0,992184	0,991446	...	0,985146	0,990351
23	0,989288	0,994884	0,995102	0,997412	...	0,997879	0,999062
24	0,999977	0,997866	0,997559	0,995883	...	0,979921	0,9893
25	0,996464	0,991627	0,99108	0,989702	...	0,972286	0,982083
26	0,999521	0,999527	0,999377	0,998409	...	0,985954	0,993656
27	0,988636	0,990617	0,990532	0,992729	...	0,98993	0,992428
28	0,989366	0,993505	0,993598	0,99595	...	0,995318	0,996906
29	0,980425	0,989848	0,99036	0,993699	...	1	0,998432
30	0,989732	0,996245	0,996557	0,998398	...	0,998432	1

Lampiran 13. Syntax GWUWR dengan Program R

```
dataa=read.table("D:\\tesisput          fix\\COD
FIX\\cod.txt",header=TRUE)
dataa1=read.txt("D:\\tesisput          fix\\COD
FIX\\revisibisquare.txt",header=FALSE)
library(corpcor)

GWUWR1<-function(dataa,dataa1,gw)
{
  n=length(dataa[,1])
  m=length(dataa[1,])
  satuan=rep(1,n)
  x=as.matrix(cbind(satuan,dataa[,2:5]))
  y=as.matrix(dataa[,1])
  w=as.matrix(dataa1[gw,])
  tx=t(x)
  epsilon=1000
  bta=c(2.921,-0.010,-0.363,0.564,-0.0007)
  sigma=1.184
  delta=9.919
  pawal=c(bta,sigma,delta)
  iterasi=1
  cat("nilai awal",pawal,"\n")
  while(epsilon>0.0001)
  {
    k1=rep(NA,n)
    k2=rep(NA,n)
    a1=matrix(NA,n,5)
    b1=rep(NA,n)
    c1=rep(NA,n)
    ah1=matrix(NA,5,5)
    aah1=matrix(0,5,5)
    h11=rep(NA,n)
    ah4=matrix(NA,n,5)
    ah7=matrix(NA,n,5)
    ah5=rep(NA,n)
    ah6=rep(NA,n)
    ah9=rep(NA,n)
    for (i in 1:n)
    {
      xt=as.matrix(x[i,])
      xtx=t(xt)
      k1[i]=y[i]-delta
      k2[i]=exp(xtx%%bta)
      a1[i,]=((-
sigma*xt)+(((k1[i]/k2[i])^sigma)*xt*sigma))*w[i]
```


Lampiran 13. Syntax GWUWR dengan Program R (lanjutan)

```
b1[i]=(1/sigma)-(xtx%%bta)+(log(k1[i]))-
(((k1[i]/k2[i])^sigma)*(log(k1[i]/k2[i]))))*w[i]
c1[i]=(-(sigma-1)*(1/k1[i]))+sigma*((k1[i]^(sigma-
1))/(k2[i]^sigma))*w[i]
ah1=-(xtx%%xtx)*(sigma^2)*w[i]
  aah1=aah1+ah1
  h11[i]=(k1[i]/k2[i])^sigma
  ah4[i,]=((-
xt)+(((k1[i]/k2[i])^sigma)*(log(k1[i]/k2[i]))*(xt*sigma)
)+xt*((k1[i]/k2[i])^sigma))*w[i]
  ah7[i,]=(-(xt*sigma*k2[i]^(-
sigma))*(sigma*(k1[i]^(sigma-1)))))*w[i]
  ah5[i]=((-1/(sigma^2))-
((k1[i]/k2[i])^sigma)*((log(k1[i]/k2[i]))^2))*w[i]
  ah6[i]=(-
(1/k1[i])+(sigma*((k1[i]/k2[i])^sigma)/(k1[i]))*(log(k1[i]
]/k2[i]))+(((k1[i]/k2[i])^sigma)/k1[i]))*w[i]
  ah9[i]=(-(sigma-
1)*((1/(k1[i]^2))+sigma*((k1[i])^(sigma-
2))/(k2[i]^sigma))*w[i]
}
a=rep(NA,5)
h4=rep(NA,5)
h7=rep(NA,5)
b=sum(b1)
c=sum(c1)
h1=aah1*sum(h11)
h5=sum(ah5)
h6=sum(ah6)
h9=sum(ah9)

g=c(a,b,c)
h2=t(h4)
h3=t(h7)
h8=t(h6)
```

Lampiran 13. Syntax GWUWR dengan Program R (lanjutan)

```
hh1=cbind(h1,h4,h7)
hh2=cbind(h2,h5,h8)
hh3=cbind(h3,h6,h9)
h=rbind(hh1,hh2,hh3)

#konvergensi
pakhir=pawal-(pseudoinverse(h)%*%g)
bta=pakhir[1:5]

sigma=abs(pakhir[6])
if (sigma>10) sigma=1.184
else sigma=abs(pakhir[6])

miny=min(y)
delta1=abs(pakhir[7])
if (delta1>miny) delta=9.919
else delta=abs(pakhir[7])

pakhir=c(bta,sigma,delta)
error=abs(pakhir-pawal)
epsilon=sqrt(sum(error^2))

pawal=c(bta,sigma,delta)
iterasi=iterasi+1

}

pakhir=pawal
bta=pakhir[1:5]
sigma=pakhir[6]
delta=pakhir[7]
cat("nilai akhir :",pawal,"\n")
cat("norm :",epsilon,"\n")
cat("iterasi",iterasi,"\n")
list(bta=bta,sigma=sigma,delta=delta)
}
```

Lampiran 14. Syntax GWUWR di bawah H_0 dengan Program R

```
dataa=read.table("D:\\tesisput          fix\\COD
FIX\\cod.txt",header=TRUE)
dataa1=read.table("D:\\tesisput          fix\\COD
FIX\\revisibisquare.txt",header=FALSE)
library(corpcor)

GWUWR0<-function(dataa,dataa1,gw)
{
  n=length(dataa[,1])
  m=length(dataa[1,])
  x=as.matrix(rep(1,n))
  y=as.matrix(dataa[,1])
  w=as.matrix(dataa1[gw,])
  tx=t(x)
  epsilon=1000
  bta=3.468514
  sigma=1.971393
  delta=3.219011
  pawal=c(bta,sigma,delta)
  iterasi=1
  cat("nilai awal",pawal,"\n")
  while(epsilon>0.0001)
  {
    k1=rep(NA,n)
    k3=rep(NA,n)
    a1=rep(NA,n)
    b1=rep(NA,n)
    c1=rep(NA,n)
    ah1=rep(NA,n)
    ah7=rep(NA,n)
    ah4=rep(NA,n)
    ah5=rep(NA,n)
    ah8=rep(NA,n)
    ah9=rep(NA,n)
```

Lampiran 14. Syntax GWUWR di bawah H_0 dengan Program R (lanjutan)

```
for (i in 1:n)
{
  a1[i]=(-sigma+((k3*sigma)*(k1[i]^sigma)))*w[i]
  b1[i]=((1/sigma)-
(bta)+(log(k1[i]))+((k3)*bta*(k1[i]^sigma))-
((k3)*(k1[i]^sigma)*(log(k1[i]))))*w[i]
  c1[i]=(-(sigma-1)*(1/k1[i])+(k3*sigma*(k1[i]^(sigma-
1))))*w[i]
  ah1[i]=(-(k3*(sigma^2)*(k1[i]^sigma))*w[i]
  ah4[i]=(-
1+(k3*sigma*(k1[i]^sigma)*log(k1[i]))+(k3*(k1[i]^sigma))-
(k3*bta*sigma*(k1[i]^sigma))*w[i]
  ah7[i]=(-(k3*(sigma^2)*(k1[i]^(sigma-1))*w[i]
  ah5[i]=(-(1/(sigma^2))-
(k3*(bta^2)*(k1[i]^sigma))+(k3*bta*(k1[i]^sigma)*(log(k1[
i])))+(k3*bta*(k1[i]^sigma)*(log(k1[i])))-
(k3*(k1[i]^sigma)*(log(k1[i]))^2))*w[i]
  ah8[i]=(-(1/k1[i])-(k3*bta*sigma*((k1[i])^(sigma-
1)))+(k3*sigma*(k1[i]^(sigma-
1)*log(k1[i])))+(k3*(k1[i]^sigma)*(1/k1[i])))*w[i]
  ah9[i]=(-(sigma-1)*((1/k1[i]^2)-((k3*sigma*(sigma-
1)*k1[i]^(sigma-2)))))*w[i]
}
a=sum(a1)
b=sum(b1)
c=sum(c1)
h1=sum(ah1)
h4=sum(ah4)
h7=sum(ah7)
h5=sum(ah5)
h8=sum(ah8)
h9=sum(ah9)

g=c(a,b,c)
h2=t(h4)
h3=t(h7)
h6=t(h8)
hh1=cbind(h1,h4,h7)
hh2=cbind(h2,h5,h8)
hh3=cbind(h3,h6,h9)
h=rbind(hh1,hh2,hh3)
```

Lampiran 14. Syntax GWUWR di bawah H_0 dengan Program R (lanjutan)

```
#konvergensi
  pakhir=pawal-(pseudoinverse(h)*%*%g)

  meany=mean(y)
  bta1=abs(pakhir[1])
  if (bta1>50) bta=3.468514
  else bta=abs(pakhir[1])

  sigma1=abs(pakhir[2])
  if (sigma1>10) sigma=1.971393
  else sigma=abs(pakhir[2])

  miny=min(y)
  delta1=abs(pakhir[3])
  if (delta1>miny) delta=3.219011
  else delta=abs(pakhir[3])

  pakhir=c(bta,sigma,delta)
  error=abs(pakhir-pawal)
  epsilon=sqrt(sum(error^2))

  pawal=c(bta,sigma,delta)
  iterasi=iterasi+1
}

pakhir=pawal
bta=pakhir[1]
sigma=pakhir[2]
delta=pakhir[3]
cat("nilai akhir :",pawal,"\n")
cat("norm :",epsilon,"\n")
cat("iterasi",iterasi,"\n")
list(bta=bta,sigma=sigma,delta=delta)
}
```

Lampiran 15. Syntax Uji Serentak GWUWR Program R

```
dataa=read.table("D:\\tesisput fix\\COD
FIX\\cod.txt",header=TRUE)
dataa1=read.table("D:\\tesisput fix\\COD
FIX\\revisibisquare.txt",header=FALSE)
gwb0=read.table("D:\\tesisput fix\\COD
FIX\\gwb0.txt",header=FALSE)
gwb=read.table("D:\\tesisput fix\\COD
FIX\\gwb.txt",header=FALSE)
library(corpcor)

ujisig<-function(dataa,gwb,gwb0)
{
  n=length(dataa[,1])
  m=length(dataa[1,])
  satuan=rep(1,n)
  x=as.matrix(cbind(satuan,dataa[,2:5]))
  y=as.matrix(dataa[,1])
  bta0=gwb0[,1]
  sigma=gwb0[,2]
  delta=gwb0[,3]
  bta=as.matrix(gwb[,1:5])
  sigma1=gwb[,6]
  delta1=gwb[,7]

  lGwb0=1
  lGwb=1
  for (i in 1:n)
  {
    xt=as.matrix(x[i,])
    xtx=t(xt)
    bta1=as.matrix(bta[i,])
    lGwb0=((sigma[i]/(exp(bta0[i])^sigma[i]))*((y[i]-
delta[i])^(sigma[i]-1))*(exp(-(y[i]-
delta[i]))/(exp(bta0[i]))^sigma[i])))*lGwb0

    lGwb=((sigma1[i]/((exp(xtx%%bta1))^sigma1[i]))*((y[i]-
delta1[i])^(sigma1[i]-1))*(exp(-(y[i]-
delta1[i]))/(exp(xtx%%bta1))^sigma1[i])))*lGwb
  }

  G=-2*log(lGwb0/lGwb)
  print(G)
  list(lGwb0=lGwb0,lGwb=lGwb)
}
ujisig(dataa,gwb,gwb0)

#output
      [,1]
[1,] 24,6524
```

Lampiran 16. Output hasil taksiran parameter $\hat{\beta}(u_i, v_i), \hat{\sigma}(u_i, v_i), \hat{\delta}(u_i, v_i)$

GWUWR

Lokasi Sungai	Taksiran Parameter $\hat{\beta}(u_i, v_i)$						
	$\hat{\beta}_0(u_i, v_i)$	$\hat{\beta}_1(u_i, v_i)$	$\hat{\beta}_2(u_i, v_i)$	$\hat{\beta}_3(u_i, v_i)$	$\hat{\beta}_4(u_i, v_i)$	$\hat{\sigma}(u_i, v_i)$	$\hat{\delta}(u_i, v_i)$
1	2,920039	-0,009975	-0,363439	0,563777	-0,000741	1,18284	9,919809
2	2,919584	-0,009932	-0,363493	0,5637941	-0,000744	1,182679	9,920027
3	2,919542	-0,009928	-0,363498	0,5638026	-0,000744	1,182673	9,920036
4	2,919539	-0,009921	-0,363456	0,563614	-0,000745	1,182575	9,920147
5	2,919669	-0,009918	-0,363377	0,5631979	-0,000744	1,182337	9,920427
6	2,919342	-0,009901	-0,363487	0,5635966	-0,000746	1,182463	9,9203
7	2,919147	-0,009878	-0,363503	0,5635109	-0,000748	1,182318	9,92049
8	2,91961	-0,009919	-0,36342	0,5633769	-0,000745	1,182415	9,920341
9	2,919688	-0,009913	-0,363361	0,563035	-0,000745	1,182205	9,920593
10	2,920744	-0,010002	-0,363171	0,5626863	-0,000738	1,182396	9,920296
11	2,91992	-0,009937	-0,363329	0,5630571	-0,000743	1,182326	9,920428
12	2,918529	-0,009846	-0,363705	0,5642425	-0,000751	1,182545	9,920261
13	2,919332	-0,00991	-0,363527	0,5638718	-0,000746	1,182657	9,920064
14	2,918617	-0,009865	-0,363741	0,5645333	-0,00075	1,18277	9,919986
15	2,918793	-0,00986	-0,363619	0,5639298	-0,00075	1,182448	9,920359
16	2,919142	-0,009911	-0,363655	0,5643976	-0,000746	1,182883	9,919817
17	2,918871	-0,009884	-0,363667	0,564369	-0,000748	1,182802	9,919921
18	2,919545	-0,009921	-0,363457	0,5636159	-0,000744	1,182577	9,920144
19	2,919574	-0,009928	-0,363481	0,5637351	-0,000744	1,182646	9,920065
20	2,919621	-0,009921	-0,363427	0,56341	-0,000745	1,182435	9,920319
21	2,918529	-0,009846	-0,363705	0,5642425	-0,000751	1,182545	9,920261
22	2,918089	-0,009826	-0,363848	0,5648615	-0,000753	1,182813	9,919961
23	2,919796	-0,009922	-0,363321	0,5629824	-0,000744	1,182257	9,920511
24	2,920119	-0,009981	-0,363422	0,5637225	-0,00074	1,182832	9,919815
25	2,920979	-0,010039	-0,363201	0,5630642	-0,000735	1,182764	9,919837
26	2,919837	-0,009954	-0,363443	0,5637334	-0,000742	1,182766	9,919901
27	2,920776	-0,009994	-0,363117	0,5623611	-0,000738	1,182181	9,920553
28	2,920231	-0,009953	-0,363226	0,5626848	-0,000741	1,182211	9,920544
29	2,919237	-0,009873	-0,363432	0,5631178	-0,000748	1,182085	9,920765
30	2,919366	-0,009895	-0,363463	0,5633988	-0,000747	1,182313	9,920485

Lampiran 17. Output hasil Z_{hitung} taksiran parameter $\hat{\beta}(u_i, v_i)$ GWUWR

Lokasi Sungai	$Z_{hitung} \hat{\beta}(u_i, v_i)$				
	$Z_{hitung0}$	$Z_{hitung1}$	$Z_{hitung2}$	$Z_{hitung3}$	$Z_{hitung4}$
1	42,16667	-3,5028	-14,3652	11,2095	-4,10674
2	42,22094	-3,48755	-14,3746	11,23057	-4,12165
3	42,22172	-3,48594	-14,3742	11,23143	-4,12253
4	42,22092	-3,48265	-14,3682	11,22962	-4,12205
5	42,17743	-3,47728	-14,3435	11,21296	-4,11552
6	42,20185	-3,47185	-14,3571	11,2274	-4,12496
7	42,14947	-3,45735	-14,3328	11,21568	-4,12439
8	42,20164	-3,47971	-14,3559	11,22175	-4,1194
9	42,13834	-3,47174	-14,3256	11,20117	-4,11206
10	42,10618	-3,50946	-14,3259	11,17468	-4,08627
11	42,17518	-3,48551	-14,3435	11,20771	-4,11029
12	42,12357	-3,44089	-14,3335	11,2236	-4,13512
13	42,2191	-3,47787	-14,3712	11,23421	-4,12635
14	42,14153	-3,45142	-14,3501	11,22938	-4,13477
15	42,14725	-3,44895	-14,3375	11,22357	-4,13177
16	42,17014	-3,47444	-14,3665	11,22833	-4,12635
17	42,17665	-3,46291	-14,3624	11,23352	-4,13196
18	42,22119	-3,48293	-14,3685	11,22963	-4,12198
19	42,22309	-3,48632	-14,3733	11,23077	-4,1219
20	42,20684	-3,48113	-14,3588	11,22328	-4,11979
21	42,12357	-3,44089	-14,3335	11,2236	-4,13512
22	42,04597	-3,42656	-14,3169	11,21398	-4,136
23	42,14471	-3,4765	-14,3285	11,20065	-4,10944
24	42,16043	-3,5048	-14,3631	11,20628	-4,10453
25	42,02969	-3,52034	-14,3169	11,15392	-4,07324
26	42,20449	-3,49652	-14,3725	11,22191	-4,11406
27	42,05114	-3,5005	-14,2979	11,15706	-4,0806
28	42,11521	-3,48776	-14,3183	11,1843	-4,09776
29	42,05085	-3,44625	-14,2895	11,18508	-4,11323
30	42,16884	-3,46643	-14,3404	11,21686	-4,12193

Lampiran 18. Output hasil taksiran parameter GWUWR di bawah H_0

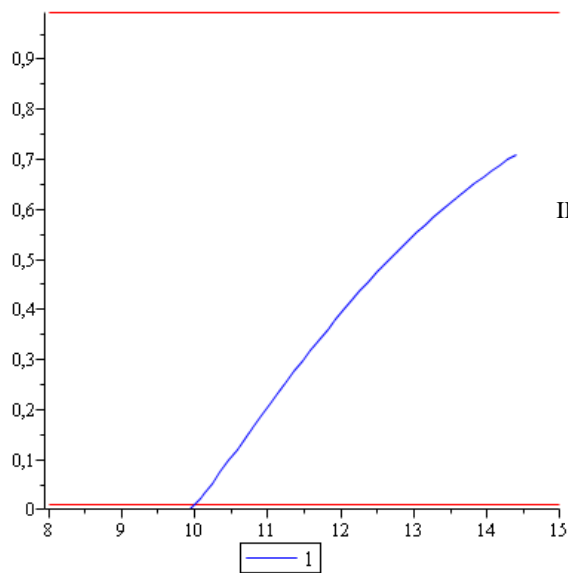
Lokasi Sungai	Taksiran Parameter		
	$\hat{\beta}_0(u_i, v_i)$	$\hat{\sigma}(u_i, v_i)$	$\hat{\delta}(u_i, v_i)$
1	3,470244	1,974761	3,253553
2	3,469856	1,973823	3,243528
3	3,469833	1,973763	3,24289
4	3,469557	1,973209	3,23678
5	3,469047	1,972222	3,22578
6	3,469349	1,972728	3,231517
7	3,46905	1,972069	3,224256
8	3,469258	1,97263	3,230273
9	3,468813	1,971738	3,220474
10	3,469223	1,972912	3,232889
11	3,469051	1,972301	3,226583
12	3,469586	1,97294	3,23429
13	3,469755	1,973537	3,240565
14	3,470097	1,974001	3,245979
15	3,469357	1,97257	3,230016
16	3,470368	1,974723	3,253589
17	3,470094	1,974083	3,246739
18	3,469564	1,973224	3,236951
19	3,46976	1,97362	3,241364
20	3,469312	1,972739	3,23151
21	3,469586	1,97294	3,23429
22	3,470132	1,973911	3,245249
23	3,46884	1,971814	3,221433
24	3,470232	1,974761	3,253514
25	3,47002	1,974611	3,251452
26	3,470004	1,974211	3,247655
27	3,468775	1,972034	3,222961
28	3,468789	1,971905	3,22171
29	3,468581	1,971225	3,214112
30	3,469068	1,972162	3,225254

Lampiran 19. Model GWUWR untuk $\hat{\theta}$ tiap lokasi sungai di Surabaya

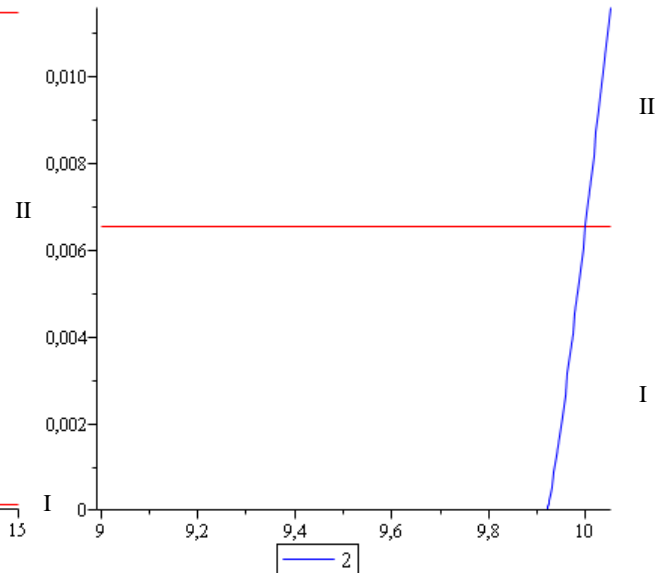
Lokasi Sungai	Model GWUWR untuk $\hat{\theta}$	$\hat{\theta}$
1	$\hat{\theta}_1 = \exp(2,9200 - 0,00997 x_1 - 0,36344 x_2 + 0,5638 x_3 - 0,000741 x_4)$	3,74
2	$\hat{\theta}_2 = \exp(2,9196 - 0,00993 x_1 - 0,36349 x_2 + 0,5638 x_3 - 0,000744 x_4)$	5,60
3	$\hat{\theta}_3 = \exp(2,9195 - 0,00993 x_1 - 0,36350 x_2 + 0,5638 x_3 - 0,000744 x_4)$	31,68
4	$\hat{\theta}_4 = \exp(2,9195 - 0,00992 x_1 - 0,36346 x_2 + 0,5636 x_3 - 0,000745 x_4)$	31,81
5	$\hat{\theta}_5 = \exp(2,9197 - 0,00992 x_1 - 0,36338 x_2 + 0,5632 x_3 - 0,000744 x_4)$	23,29
6	$\hat{\theta}_6 = \exp(2,9193 - 0,00990 x_1 - 0,36349 x_2 + 0,5636 x_3 - 0,000746 x_4)$	9,81
7	$\hat{\theta}_7 = \exp(2,9191 - 0,00988 x_1 - 0,36350 x_2 + 0,5635 x_3 - 0,000748 x_4)$	7,83
8	$\hat{\theta}_8 = \exp(2,9196 - 0,00992 x_1 - 0,36342 x_2 + 0,5634 x_3 - 0,000745 x_4)$	15,70
9	$\hat{\theta}_9 = \exp(2,9197 - 0,00991 x_1 - 0,36336 x_2 + 0,5630 x_3 - 0,000745 x_4)$	14,48
10	$\hat{\theta}_{10} = \exp(2,9207 - 0,01000 x_1 - 0,36317 x_2 + 0,5627 x_3 - 0,000738 x_4)$	8,29
11	$\hat{\theta}_{11} = \exp(2,9199 - 0,00994 x_1 - 0,36333 x_2 + 0,5631 x_3 - 0,000743 x_4)$	13,35
12	$\hat{\theta}_{12} = \exp(2,9185 - 0,00985 x_1 - 0,36371 x_2 + 0,5642 x_3 - 0,000751 x_4)$	13,57
13	$\hat{\theta}_{13} = \exp(2,9193 - 0,00991 x_1 - 0,36353 x_2 + 0,5639 x_3 - 0,000746 x_4)$	15,22
14	$\hat{\theta}_{14} = \exp(2,9186 - 0,00987 x_1 - 0,36374 x_2 + 0,5645 x_3 - 0,000750 x_4)$	16,19
15	$\hat{\theta}_{15} = \exp(2,9188 - 0,00986 x_1 - 0,36362 x_2 + 0,5639 x_3 - 0,000750 x_4)$	14,18
16	$\hat{\theta}_{16} = \exp(2,9191 - 0,00991 x_1 - 0,36366 x_2 + 0,5644 x_3 - 0,000746 x_4)$	17,49
17	$\hat{\theta}_{17} = \exp(2,9189 - 0,00988 x_1 - 0,36367 x_2 + 0,5644 x_3 - 0,000748 x_4)$	10,12
18	$\hat{\theta}_{18} = \exp(2,9195 - 0,00992 x_1 - 0,36346 x_2 + 0,5636 x_3 - 0,000744 x_4)$	26,53
19	$\hat{\theta}_{19} = \exp(2,9196 - 0,00993 x_1 - 0,36348 x_2 + 0,5637 x_3 - 0,000744 x_4)$	30,55
20	$\hat{\theta}_{20} = \exp(2,9196 - 0,00992 x_1 - 0,36343 x_2 + 0,5634 x_3 - 0,000745 x_4)$	17,03
21	$\hat{\theta}_{21} = \exp(2,9185 - 0,00985 x_1 - 0,36371 x_2 + 0,5642 x_3 - 0,000751 x_4)$	11,47
22	$\hat{\theta}_{22} = \exp(2,9181 - 0,00983 x_1 - 0,36385 x_2 + 0,5649 x_3 - 0,000753 x_4)$	15,71
23	$\hat{\theta}_{23} = \exp(2,9198 - 0,00992 x_1 - 0,36332 x_2 + 0,5630 x_3 - 0,000744 x_4)$	18,06
24	$\hat{\theta}_{24} = \exp(2,9201 - 0,00998 x_1 - 0,36342 x_2 + 0,5637 x_3 - 0,000740 x_4)$	6,14
25	$\hat{\theta}_{25} = \exp(2,9210 - 0,01004 x_1 - 0,36320 x_2 + 0,5631 x_3 - 0,000735 x_4)$	7,43
26	$\hat{\theta}_{26} = \exp(2,9198 - 0,00995 x_1 - 0,36344 x_2 + 0,5637 x_3 - 0,000742 x_4)$	17,12
27	$\hat{\theta}_{27} = \exp(2,9208 - 0,00999 x_1 - 0,36312 x_2 - 0,5624 x_3 - 0,000738 x_4)$	17,90
28	$\hat{\theta}_{28} = \exp(2,9202 - 0,00995 x_1 - 0,36323 x_2 + 0,5627 x_3 - 0,000741 x_4)$	16,388
29	$\hat{\theta}_{29} = \exp(2,9192 - 0,00987 x_1 - 0,36343 x_2 + 0,5631 x_3 - 0,000748 x_4)$	13,108
30	$\hat{\theta}_{30} = \exp(2,9194 - 0,00990 x_1 - 0,36346 x_2 + 0,5634 x_3 - 0,000747 x_4)$	21,083

Lampiran 20. Plot Fungsi Distribusi Kumulatif Setiap Lokasi

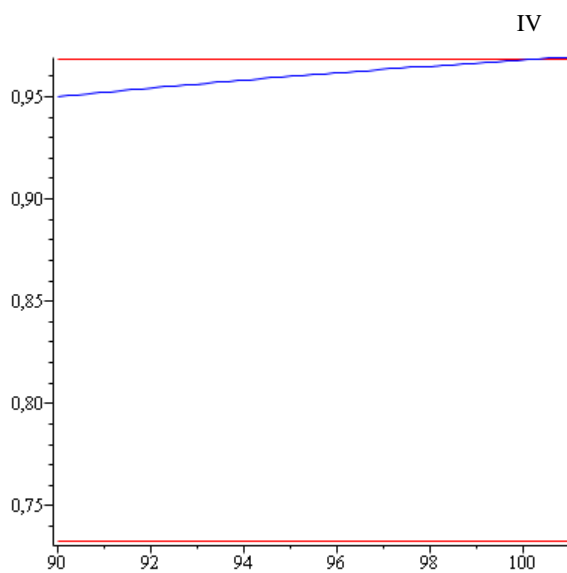
Lokasi 1



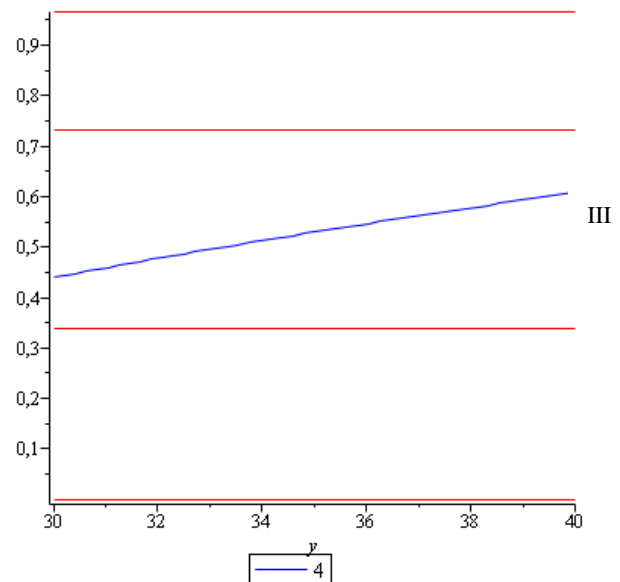
Lokasi 2



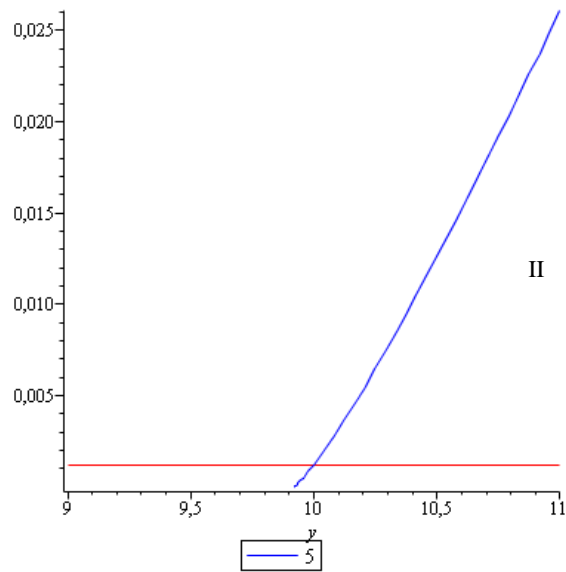
Lokasi 3



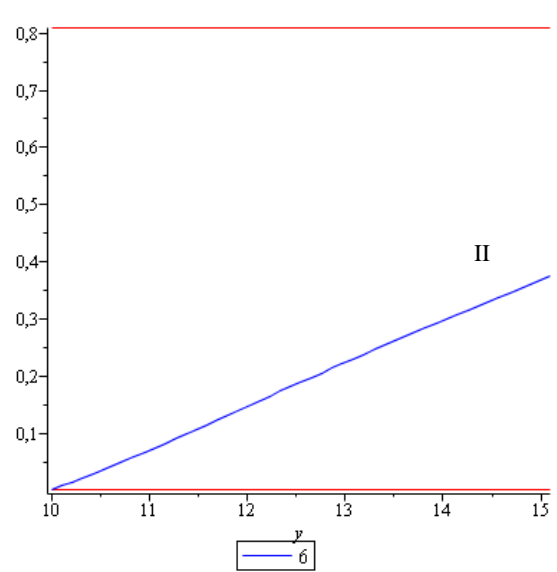
Lokasi 4



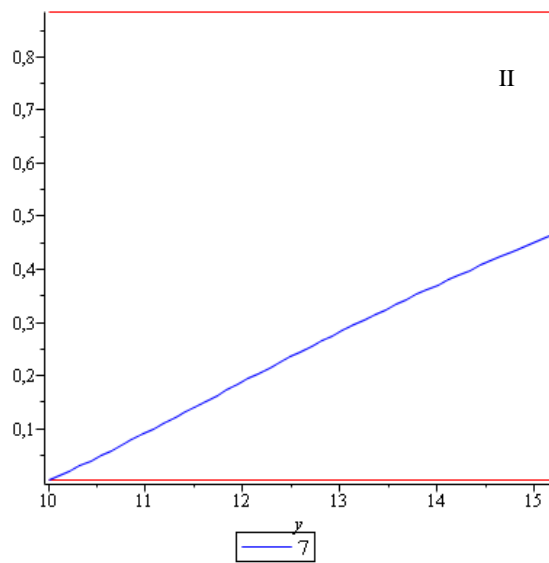
Lokasi 5



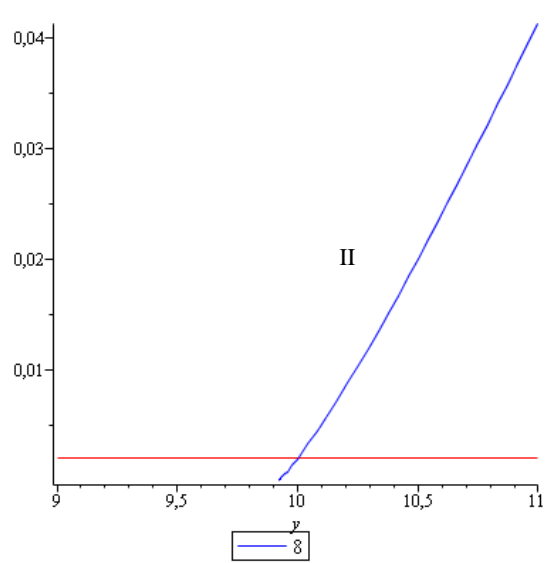
Lokasi 6



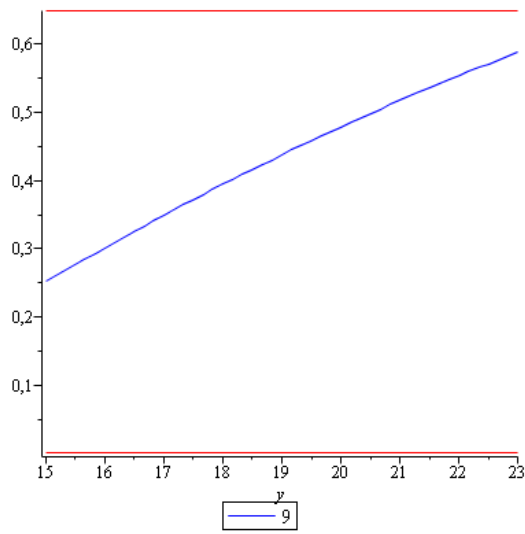
Lokasi 7



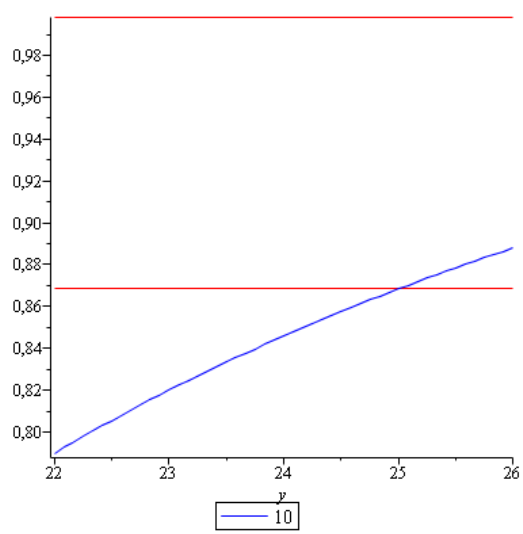
Lokasi 8



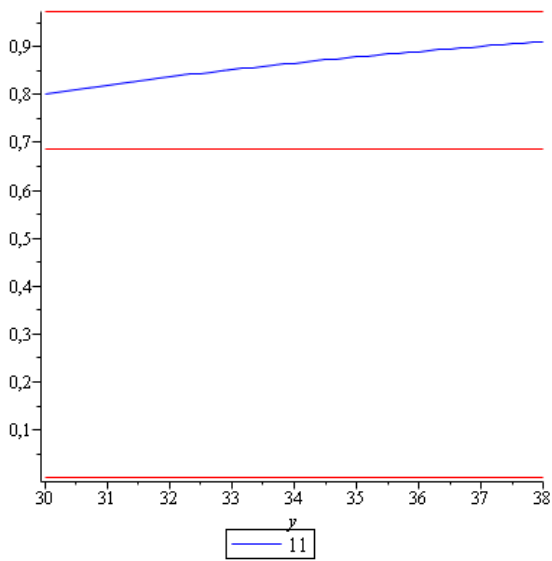
Lokasi 9



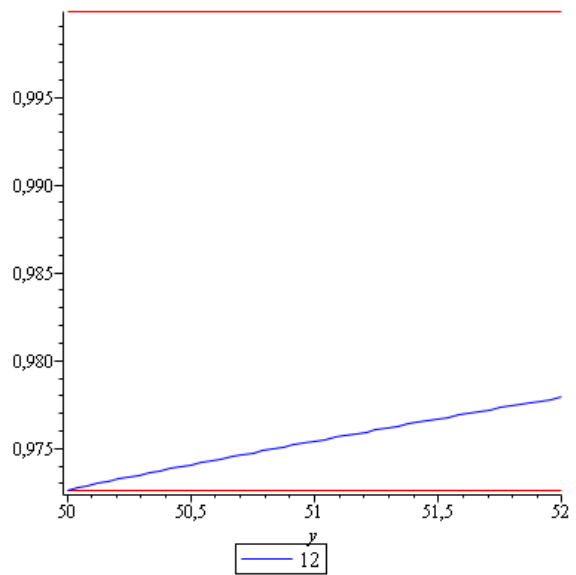
Lokasi 10



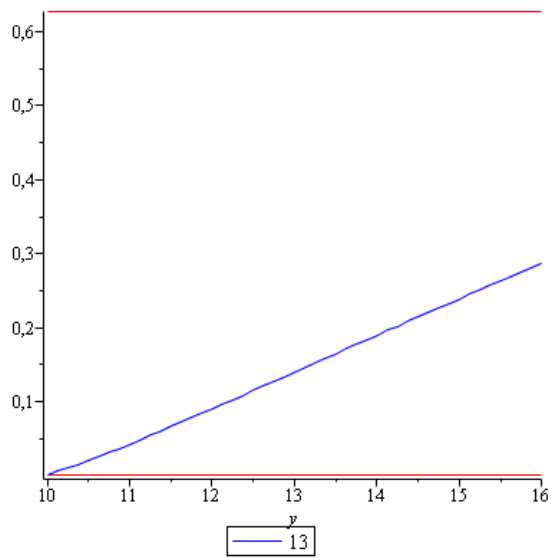
Lokasi 11



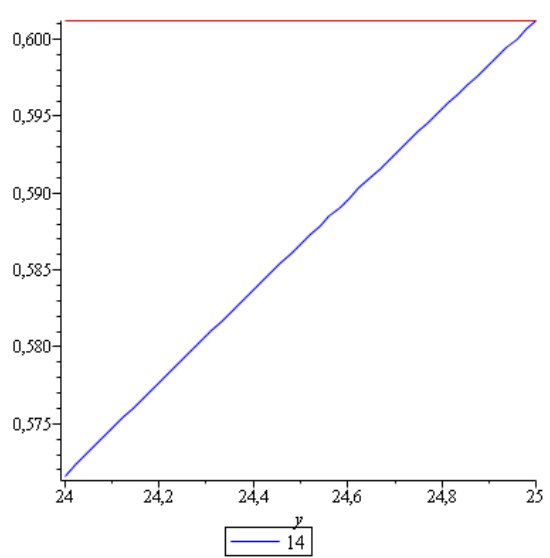
Lokasi 12



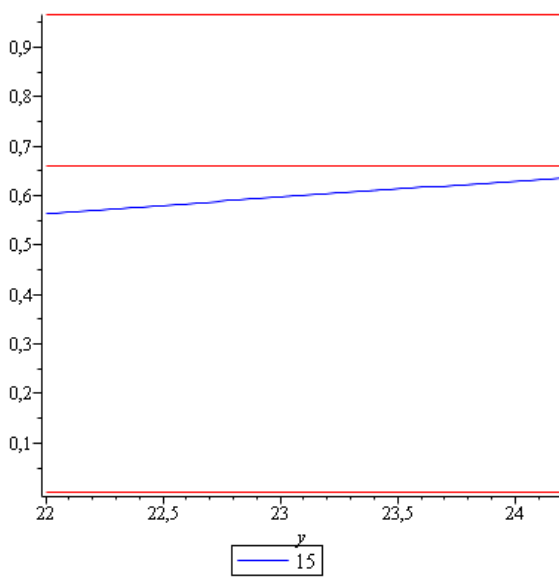
Lokasi 13



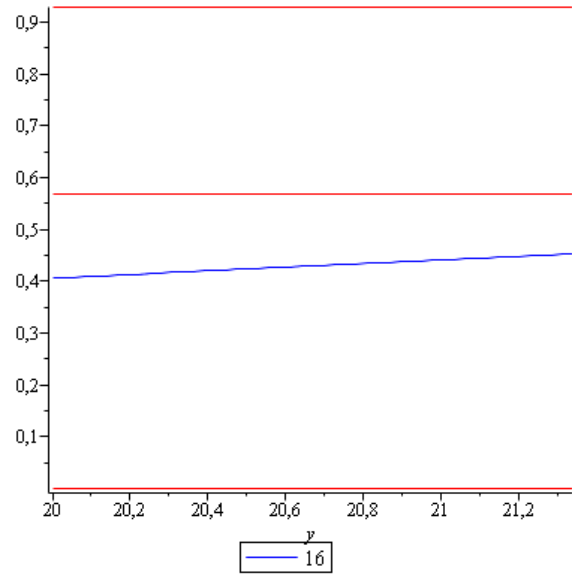
Lokasi 14



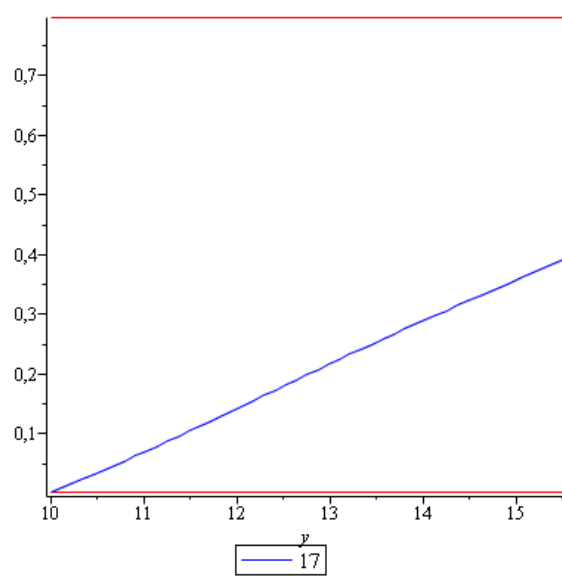
Lokasi 15



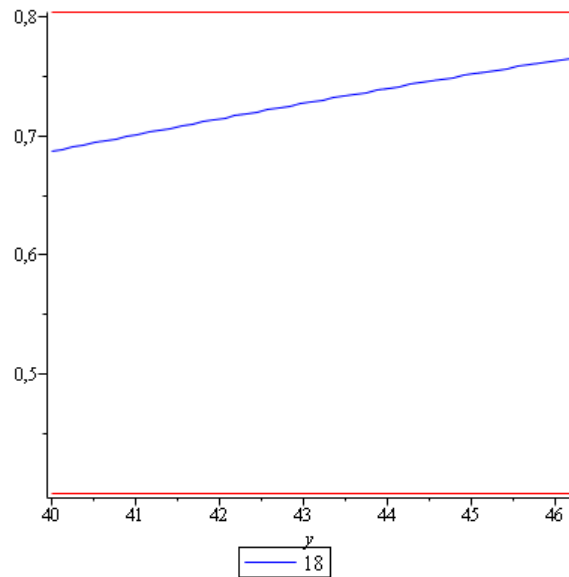
Lokasi 16



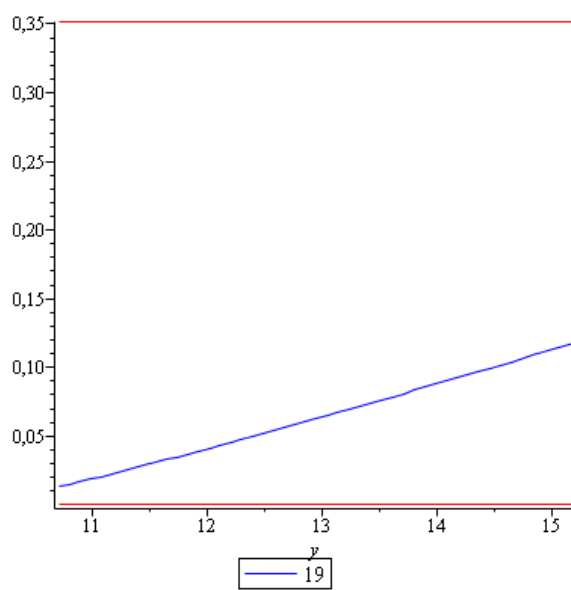
Lokasi 17



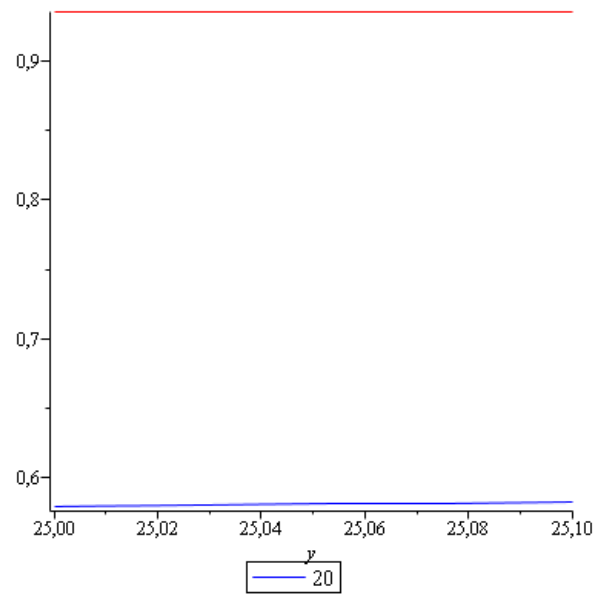
Lokasi 18



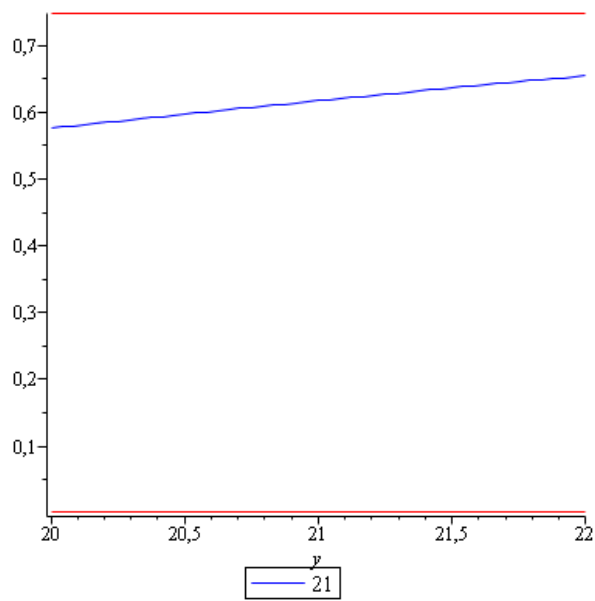
Lokasi 19



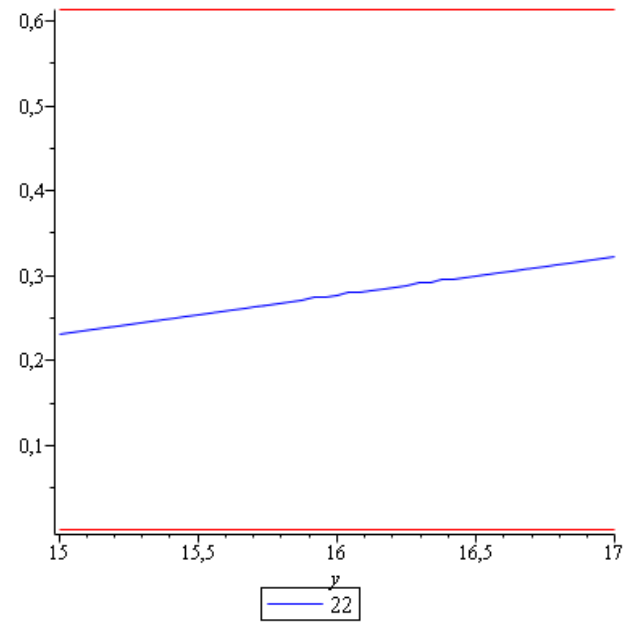
Lokasi 20



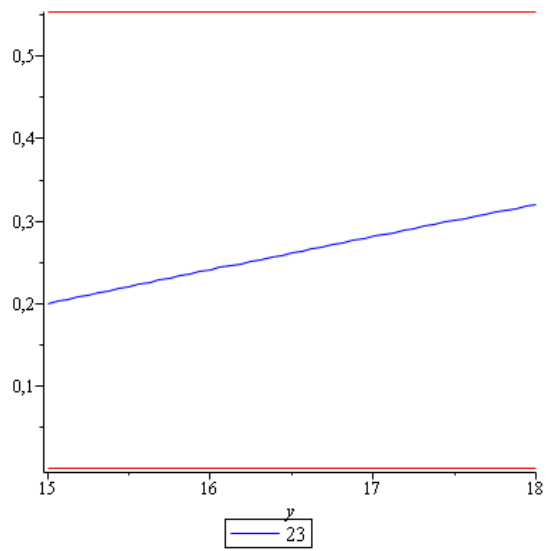
Lokasi 21



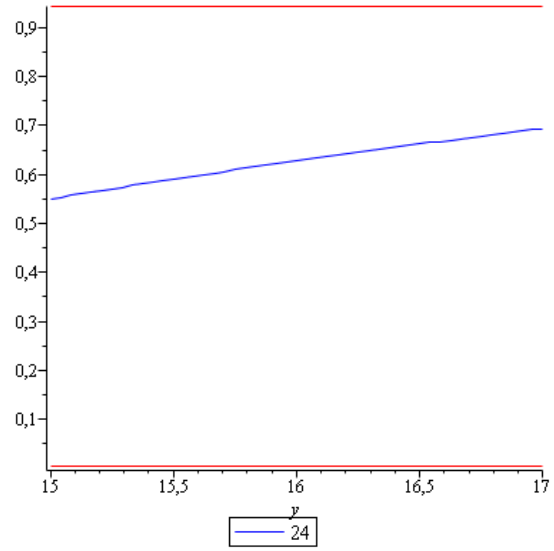
Lokasi 22



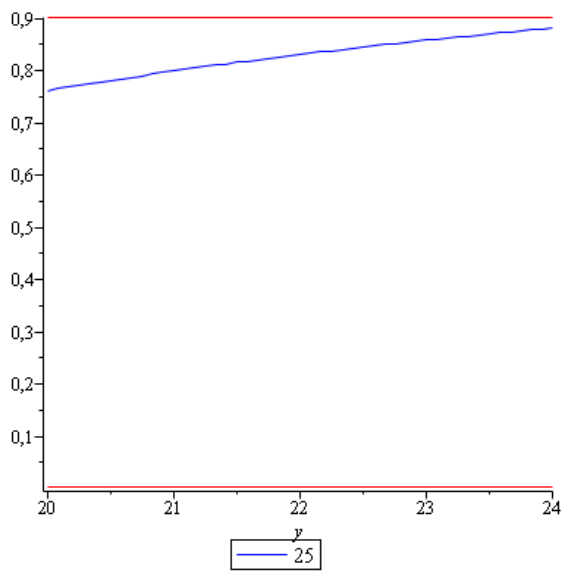
Lokasi 23



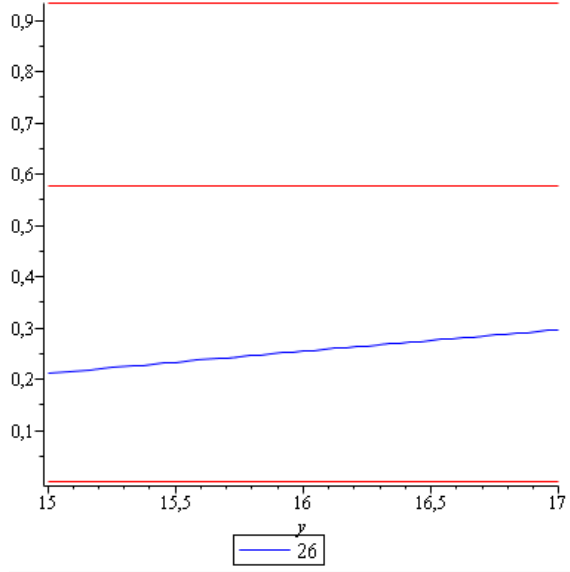
Lokasi 24



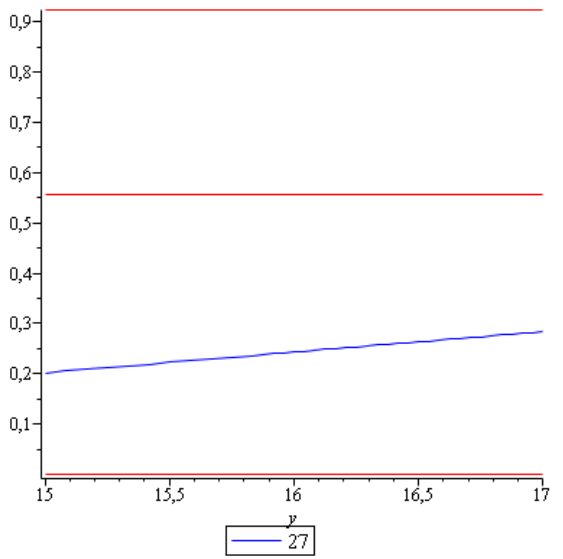
Lokasi 25



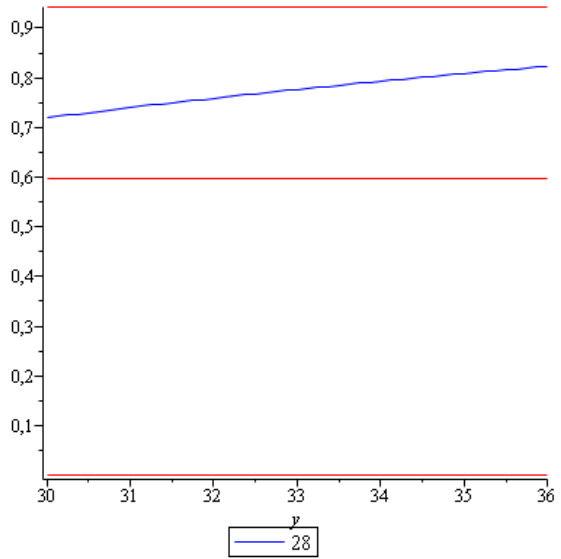
Lokasi 26



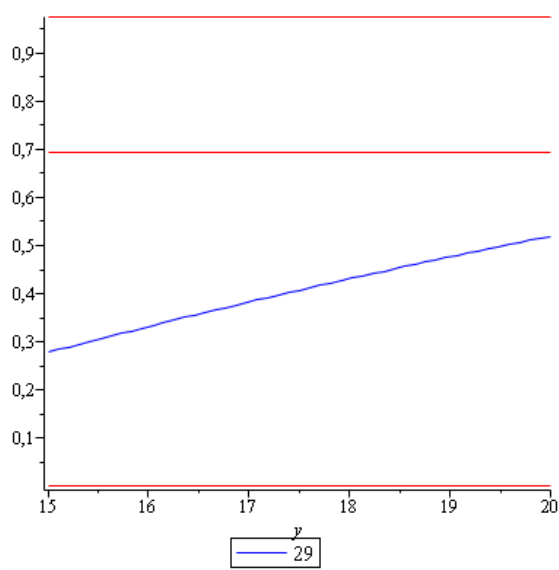
Lokasi 27



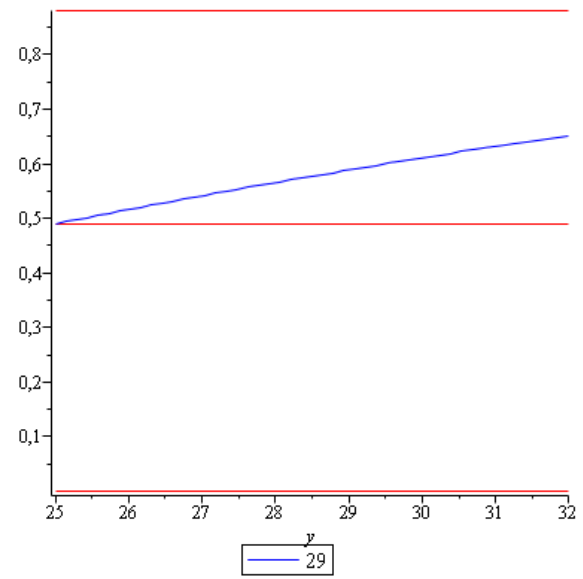
Lokasi 28



Lokasi 29



Lokasi 30



Lampiran 21. Probabilitas Fungsi Distribusi Kumulatif Setiap Lokasi

Lokasi Sungai	Peluang
Air badan air Kali Surabaya di Kedurus	0,7046
Air badan air Kali Surabaya di jembatan Wonokromo	0,0116
Air badan air Kalimas di jembatan Ngagel	0,9671
Air badan air Kalimas di jembatan Keputran Selatan	0,5847
Air badan air Kalimas di jembatan Kebon Rojo	0,0192
Air badan air Kali Jeblokan di Petojo	0,3741
Air badan air Kali Jeblokan di Kedung Cowek	0,4602
Air badan air Kali Pegirian di Jl. Undaan	0,0100
Air badan air Kali Pegirian di Jl. Pegirian	0,5816
Air badan air Kali Banyu Urip di jembatan Balongsari Tama	0,8775
Air badan air Kali Greges di jembatan Jl. Dupak	0,9021
Air badan air Kalidami di jembatan Kalidami	0,9758
Air badan air Kalibokor di jembatan Pucang	0,2502
Air badan air Kali Wonorejo di Jembatan Kedung Baruk	0,5987
Air badan air Kali Kepiting di Jl. Sutorejo	0,6349
Air badan air Kali Kebon Agung di Rungkut Industri	0,4531
Air badan air Kali Wonokromo di jembatan Merr II	0,3907
Air badan air saluran Dinoyo di pompa air Dinoyo	0,7638
Air badan air saluran Darmo di pompa air Darmo	0,1166
Air badan air saluran Kenari di pompa air Kenari	0,5799
Air badan air Bozem Kalidami	0,6100
Air badan air Bozem Wonorejo	0,2795
Air badan air bozem Morokrembangan	0,3018
Air badan air Bozem Kedurus	0,6477
Air badan air Kali Makmur di Lidah Kulon Jl. Bangkingan	0,8605
Air badan air Kali Banyu Urip di pompa air Gunungsari	0,2766
Air badan air saluran Margomulyo di Jl. Kalianak	0,2128
Air Badan Air Kali Krembangan di Jembatan Jl. Dumar Industri	0,8110
Air badan air saluran Tambak Wedi di pompa air Tambak Wedi	0,4313
Air badan air saluran Tambak Wedi di Jl. Kenjeran (makam WR Supratman)	0,6620

BIOGRAFI PENULIS

Penulis yang mempunyai nama lengkap Fitriarma Putri Santoso atau yang akrab disapa “Fitri” ini lahir di kota Surabaya pada tanggal 8 Mei 1989, merupakan putri kedua dari Gatoet Santoso dan Elok Ismawati. Merupakan anak kedua dari tiga bersaudara. Riwayat pendidikan yang ditempuh penulis antara lain Taman Kanak-kanak Hang Tuah 7 Surabaya, Sekolah Dasar Hangtuah 7 Surabaya, Sekolah Menengah Pertama Negeri 12 Surabaya dan Sekolah Menengah Atas Negeri 1 Surabaya. Setelah menyelesaikan pendidikan di bangku SMA, penulis melanjutkan pendidikan di bangku perkuliahan dan diterima di jurusan Statistika angkatan 2007 Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Setelah itu pada pertengahan tahun 2013, penulis diterima sebagai mahasiswa S2 Program Pascasarjana di Jurusan Statistika FMIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Saran dan kritik yang berhubungan dengan tesis ini dapat ditujukan melalui alamat email fitriarmaputrisantoso@gmail.com

